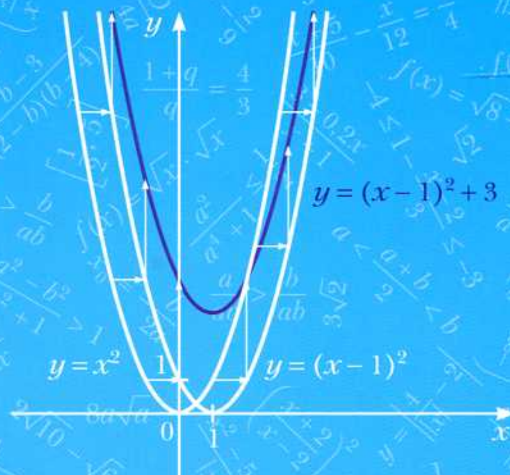
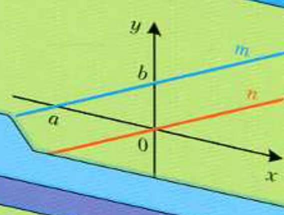
А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

ФГОС

9 класс





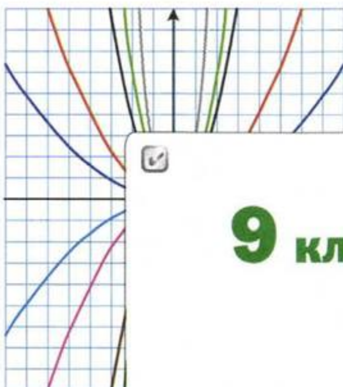
Вентана-Граф

Алгебра

Алгоритм успеха

А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

Алгебра



9 класс

Учебник для учащихся общеобразовательных организаций

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2014

ББК 22.141я721
М52

Учебник включён в федеральный перечень

Мерзляк А.Г.

М52 Алгебра : 9 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — М. : Вентана-Граф, 2014. — 304 с. : ил.

ISBN 978-5-360-05308-8

Учебник предназначен для изучения алгебры в 9 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к алгебре.

Учебник входит в систему «Алгоритм успеха».

Содержание учебника соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования (2010 г.).

ББК 22.141я721

ISBN 978-5-360-05308-8

От авторов

Дорогие девятиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучение алгебры. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Надеемся, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. **Жирным** шрифтом напечатаны определения, математические термины. *Курсивом* напечатаны отдельные слова или предложения, важные для понимания текста.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно те, которые обозначены звёздочкой). Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики «Проверьте себя».

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите знать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

✧ Сложные задачи

✵ Задачи высокой сложности

◄ Окончание доказательства теоремы или решения задачи

Работа с компьютером

340 Задания, рекомендованные для домашней работы

310 Задания, рекомендованные для устной работы

Глава 1. Неравенства

В этой главе вы узнаете, в каком случае число a считают больше (меньше) числа b, изучите свойства числовых неравенств, узнаете, что называют решением неравенства с одной переменной, решением системы неравенств с одной переменной.

Вы научитесь оценивать значения выражений, доказывать неравенства, решать линейные неравенства и системы линейных неравенств с одной переменной.

§ 1. Числовые неравенства

На практике вам часто приходится сравнивать значения величин. Например, площадь спортзала больше площади классной комнаты, расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга меньше расстояния от Москвы до Пятигорска.

Результаты таких сравнений можно записывать в виде числовых неравенств, используя знаки >, <.

Если число a больше числа b, то пишут $a > b$; если число a меньше числа b, то пишут $a < b$.

Очевидно, что $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$, $\sqrt{2} > 1$. Справедливость этих неравенств следует из правил сравнения действительных чисел, которые вы изучили в предыдущих классах.

Однако числа можно сравнивать не только с помощью изученных ранее правил. Другой способ, более универсальный, основан на таких очевидных соображениях: если разность двух чисел положительна, то уменьшаемое больше вычитаемого, если же разность отрицательна, то уменьшаемое меньше вычитаемого.

Эти соображения подсказывают, что удобно принять такое определение.

Определение

Число a считают больше числа b, если разность $a - b$ является положительным числом. Число a считают меньше числа b, если разность $a - b$ является отрицательным числом.

Это определение позволяет задачу о сравнении двух чисел свести к задаче о сравнении их разности с нулём. Например, чтобы сравнить значения выражений $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ и $2-\sqrt{3}$, рассмотрим их разность:

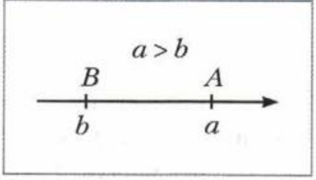
$$\frac{2}{2+\sqrt{3}}-(2-\sqrt{3})=\frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-(4-3)}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Поскольку $\frac{1}{2+\sqrt{3}}>0$, то $\frac{2}{2+\sqrt{3}}>2-\sqrt{3}$.

Заметим, что разность чисел a и b может быть либо положительной, либо отрицательной, либо равной нулю, поэтому *для любых чисел a и b справедливо одно и только одно из таких соотношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.*

Если $a > b$, то точка, изображающая число a на координатной прямой, лежит правее точки, изображающей число b (рис. 1).

Рис. 1



Часто в повседневной жизни мы пользуемся высказываниями «не больше», «не меньше». Например, в соответствии с санитарными нормами количество учеников в 9 классе должно быть не больше 25. Дорожный знак, изображённый на рисунке 2, означает, что скорость движения автомобиля должна быть не меньше 30 км/ч.

Рис. 2

В математике для высказывания «не больше» используют знак $\leq$ (читают: «меньше или равно»), а для высказывания «не меньше» — знак $\geq$ (читают: «больше или равно»).

Если $a < b$ или $a = b$, то верно неравенство $a \leq b$.

Если $a > b$ или $a = b$, то верно неравенство $a \geq b$.

Например, неравенства $7 \leq 7$, $7 \leq 15$, $-3 \geq -5$ верны. Заметим, что, например, неравенство $7 \leq 5$ неверно.

Знаки $<$ и $>$ называют знаками **строгого неравенства**, а знаки $\leq$ и $\geq$ называют знаками **нестрогого неравенства**.

Пример 1. Докажите, что при любых значениях a верно неравенство

$$(a+1)(a+2) > a(a+3).$$

Решение. Для решения достаточно показать, что при любом a разность левой и правой частей данного неравенства положительна. Имеем:

$$(a+1)(a+2)-a(a+3)=a^2+2a+a+2-a^2-3a=2. ◄$$

В таких случаях говорят, что **доказано неравенство** $(a + 1)(a + 2) > a(a + 3)$.

Пример 2. Докажите неравенство $(a - 3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$, где a – любое число.

Решение. Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства:

$(a - 3)^2 - (2a^2 - 6a + 10) = a^2 - 6a + 9 - 2a^2 + 6a - 10 = -a^2 - 1 = -a^2 + (-1)$.

При любом значении a имеем: $-a^2 \le 0$. Сумма неположительного и отрицательного чисел является числом отрицательным. Значит, $-a^2 + (-1) < 0$. Отсюда следует, что $(a - 3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$ при любом значении a. ◄

Пример 3. Докажите неравенство $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, где $a \ge 0$, $b \ge 0$.

Решение. Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства. Имеем:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Выражение $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ принимает неотрицательные значения при любых неотрицательных значениях переменных a и b. Следовательно, доказываемое неравенство верно. ◄

Заметим, что выражение $\sqrt{ab}$ называют **средним геометрическим** чисел a и b.

Итак, мы доказали, что *среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического*.

Пример 4. Докажите, что $a^2 - ab + b^2 \ge 0$ при любых значениях a и b.

Решение. Имеем:

$$a^2 - ab + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2.$$

Поскольку $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 \ge 0$ и $\frac{3}{4}b^2 \ge 0$ при любых значениях a и b, то $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \ge 0$ при любых значениях a и b.

Следовательно, $a^2 - ab + b^2 \ge 0$ при любых значениях a и b. ◄

1. В каком случае число a считают больше числа b?

2. В каком случае число a считают меньше числа b?

3. Как расположена на координатной прямой точка, изображающая число a, относительно точки, изображающей число b, если $a > b$?
4. Какой символ используют для выражения «не больше» и как этот символ читают?
5. Какой символ используют для выражения «не меньше» и как этот символ читают?
6. В каком случае верно неравенство $a \le b$?
7. В каком случае верно неравенство $a \ge b$?
8. Поясните, какие знаки называют знаками строгого, а какие — нестрогого неравенства.

Упражнения

1. Сравните числа a и b, если:
1) $a - b = 0{,}4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$.

2. Известно, что $m < n$. Может ли разность $m - n$ быть равной числу:
1) 4,6; 2) –5,2; 3) 0?

3. Какое из чисел x или y больше, если:
1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$?

4. Как расположена на координатной прямой точка $A(a)$ относительно точки $B(b)$, если:
1) $a - b = 2$; 2) $a - b = -6$; 3) $a - b = 0$; 4) $b - a = \sqrt{2}$?

5. Могут ли одновременно выполняться неравенства:
1) $a > b$ и $a < b$; 2) $a \ge b$ и $a \le b$?

6. Сравните значения выражений $(a - 2)^2$ и $a(a - 4)$ при значении a, равном:
1) 6; 2) –3; 3) 2.
Можно ли по результатам выполненных сравнений утверждать, что при любом значении a значение первого выражения больше соответствующего значения второго выражения? Докажите, что при любом значении a значение первого выражения больше соответствующего значения второго выражения.

7. Сравните значения выражений $4(b + 1)$ и $b - 2$ при значении b, равном:
1) –1; 2) 0; 3) 3.
Верно ли утверждение, что при любом значении b значение выражения $4(b + 1)$ больше соответствующего значения выражения $b - 2$?

8. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:
1) $(a + 3)(a + 1) > a(a + 4)$;
2) $3(b - 4) + 2b < 5b - 10$;
3) $(c - 4)(c + 4) > c^2 - 20$;
4) $x(x + 6) - x^2 < 2(3x + 1)$;
5) $(y + 5)(y - 2) \ge 3y - 10$;
6) $8m^2 - 6m + 1 \le (3m - 1)^2$;
7) $a(a - 2) \ge -1$;
8) $(b + 7)^2 > 14b + 40$.

9. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

1) $(p-3)(p+4) < p(p+1)$;
2) $(x+1)^2 > x(x+2)$;
3) $(a-5)(a+2) > (a+5)(a-8)$;
4) $y(y+8) < (y+4)^2$;
5) $(2a-5)^2 \le 6a^2 - 20a + 25$;
6) $a^2 + 4 \ge 4a$.

10. Верно ли утверждение:

1) если $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$;
2) если $a > 1$, то $\frac{2}{a} < 2$;
3) если $a < 1$, то $\frac{2}{a} > 2$;
4) если $\frac{a}{b} > 1$, то $a > b$;
5) если $a^2 > 1$, то $a > 1$?

11. Докажите неравенство:

1) $2a^2 - 8a + 16 > 0$;
2) $4b^2 + 4b + 3 > 0$;
3) $a^2 + ab + b^2 \ge 0$;
4) $(3a+2)(2a-4) - (2a-5)^2 > 3(4a-12)$;
5) $a(a-3) > 5(a-4)$;
6) $(a-b)(a+5b) \le (2a+b)(a+4b) + ab$.

12. Докажите неравенство:

1) $28a - 32 \le 7a^2 - 4$;
2) $9x^2 - 6xy + 4y^2 \ge 0$;
3) $3(b-1) < b(b+1)$;
4) $(4p-1)(p+1) - (p-3)(p+3) > 3(p^2+p)$.

13. Докажите, что:

1) $a^3 - 6a^2 + a - 6 \ge 0$, если $a \ge 6$;
2) $ab + 1 > a + b$, если $a > 1$ и $b > 1$;
3) $\frac{a+3}{3} + \frac{3a-2}{4} < a$, если $a < -6$.

14. Докажите, что:

1) $ab(b-a) \le a^3 - b^3$, если $a \ge b$;
2) $\frac{a-1}{2} - \frac{a-2}{3} > \frac{1}{2}$, если $a > 2$.

15. Сравните сумму квадратов двух произвольных действительных чисел и их удвоенное произведение.

16. Даны три последовательных натуральных числа. Сравните:

1) квадрат среднего из этих чисел и произведение двух других;
2) удвоенный квадрат среднего из этих чисел и сумму квадратов двух других.

17. Сравните сумму квадратов двух положительных чисел и квадрат их суммы.

18. Как изменится – увеличится или уменьшится – правильная дробь $\frac{a}{b}$, $a > 0$, $b > 0$, если её числитель и знаменатель увеличить на одно и то же число?

19. Как изменится – увеличится или уменьшится – неправильная дробь $\frac{a}{b}$, $a > 0$, $b > 0$, если её числитель и знаменатель увеличить на одно и то же число?

20. Докажите, что сумма любых двух взаимно обратных положительных чисел не меньше чем 2.

21. Докажите, что сумма любых двух взаимно обратных отрицательных чисел не больше чем −2.

22. Выполняется ли данное неравенство при любых значениях a и b:

1) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1} > 1$; 2) $\frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} > -1$?

23. Докажите, что при любых значениях переменной верно неравенство:

1) $\frac{a^2}{a^4 + 1} \le \frac{1}{2}$; 2) $\frac{(5a + 1)^2}{5} \ge 4a$.

24. Докажите, что если $a < b$, то $a < \frac{a + b}{2} < b$.

25. Докажите, что если $a < b < c$, то $a < \frac{a + b + c}{3} < c$.

26. Выполняется ли неравенство $\frac{a^2 + 4}{2} \ge \sqrt{a^2 + 3}$ при всех значениях a?

27. Докажите, что при всех значениях переменной верно неравенство $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \ge 2$.

28. Докажите неравенство:

1) $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \ge 0$;
2) $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0$;
3) $2m^2 - 6mn + 9n^2 - 6m + 9 \ge 0$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \ge 4(a + b + c)$;
5) $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \ge 4ab$.

29. Докажите неравенство:

1) $a^2 + b^2 - 16a + 14b + 114 > 0$;
2) $x^2 + y^2 + 10 \ge 6x - 2y$;
3) $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4 \ge 0$.

Упражнения для повторения

30. Известно, что $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d < 0$. Сравните с нулём значение выражения:

1) bc; 3) $\frac{a}{b}$; 5) $\frac{ac}{d}$; 7) $abcd$;

2) cd; 4) $\frac{ab}{c}$; 6) $\frac{a}{bc}$; 8) $\frac{b}{acd}$.

31. Что можно сказать о знаках чисел a и b, если:

1) $ab > 0$; 3) $\frac{a}{b} > 0$; 5) $a^2b > 0$;

2) $ab < 0$; 4) $\frac{a}{b} < 0$; 6) $a^2b < 0$?

32. Поясните, почему при любых значениях переменной (или переменных) верно неравенство:

1) $a^2 \geq 0$; 5) $a^2 + b^2 \geq 0$;
2) $a^2 + 1 > 0$; 6) $a^2 + b^2 + 2 > 0$;
3) $(a + 1)^2 \geq 0$; 7) $(a - 2)^2 + (b + 1)^2 \geq 0$;
4) $a^2 - 4a + 4 \geq 0$; 8) $\sqrt{a^2 + 3} > 0$.

33. Сравните с нулём значение выражения, где a – произвольное число:

1) $4 + a^2$; 4) $-4 - (a - 4)^2$;
2) $(4 - a)^2$; 5) $(-4)^8 + (a - 8)^4$;
3) $-4 - a^2$; 6) $(4 - a)^2 + (4a - 1000)^2$.

34. Упростите выражение:

1) $2a(5a - 7) - 5a(3 - 2a)$; 4) $16m^2 - (3 - 4m)(3 + 4m)$;
2) $(2b - 3)(4b + 9)$; 5) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2$;
3) $(2c - 6)(8c + 5) - (5c + 2)(5c - 2)$; 6) $(x - 4)(x + 4) - (x - 8)^2$.

Учимся делать нестандартные шаги

35. Все натуральные числа от 1 до 1000 включительно разбиты на две группы: чётные числа и нечётные числа. В какой из групп сумма всех цифр, используемых для записи чисел, больше и на сколько?

§ 2. Основные свойства числовых неравенств

В этом параграфе рассмотрим свойства числовых неравенств, часто используемые при решении задач. Их называют **основными свойствами числовых неравенств**.

Теорема 2.1

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

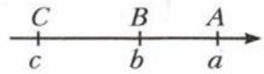
Доказательство

Поскольку по условию $a > b$ и $b > c$, то разности $a - b$ и $b - c$ являются положительными числами. Тогда положительной будет их сумма $(a - b) + (b - c)$. Имеем: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Следовательно, разность $a - c$ является положительным числом, поэтому $a > c$. ◄

Аналогично доказывают такое свойство: ***если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.***

Теорему 2.1 можно проиллюстрировать геометрически: если на координатной прямой точка $A(a)$ лежит правее точки $B(b)$, а точка $B(b)$ – правее точки $C(c)$, то точка $A(a)$ лежит правее точки $C(c)$ (рис. 3).

Рис. 3



Теорема 2.2

Если $a > b$ и c — любое число, то $a + c > b + c$.

Доказательство

Рассмотрим разность $(a + c) - (b + c)$. Имеем: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Поскольку по условию $a > b$, то разность $a - b$ является положительным числом. Следовательно, $a + c > b + c$. ◄

Аналогично доказывают такое свойство: ***если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.***

Поскольку вычитание можно заменить сложением ($a - c = a + (-c)$), то теорему 2.2 можно сформулировать так:

если к обеим частям верного неравенства прибавить или из обеих частей верного неравенства вычесть одно и то же число, то получим верное неравенство.

Следствие

Если любое слагаемое перенести из одной части верного неравенства в другую, изменив знак слагаемого на противоположный, то получим верное неравенство.

Доказательство

Пусть неравенство $a > b + c$ верно. Вычтем из обеих его частей число c. Получим: $a - c > b + c - c$, т. е. $a - c > b$. ◄

Теорема 2.3

Если $a > b$ и c — положительное число, то $ac > bc$. Если $a > b$ и c — отрицательное число, то $ac < bc$.

Доказательство

Рассмотрим разность $ac - bc$. Имеем: $ac - bc = c(a - b)$.

По условию $a > b$, следовательно, разность $a - b$ является положительным числом.

Если $c > 0$, то произведение $c(a - b)$ является положительным числом, следовательно, разность $ac - bc$ является положительной, т. е. $ac > bc$.

Если $c < 0$, то произведение $c(a - b)$ является отрицательным числом, следовательно, разность $ac - bc$ является отрицательной, т. е. $ac < bc$. ◄

Аналогично доказывают такое свойство: ***если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$; если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.***

Поскольку деление можно заменить умножением $\left(\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}\right)$, то теорему 2.3 можно сформулировать так:

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство;

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.

Следствие

Если $a > b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доказательство

Разделим обе части неравенства $a > b$ на положительное число ab. Получим верное неравенство $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, т. е. $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Отсюда $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ◄

Обратим внимание, что если из формулировки следствия убрать условие $ab > 0$, то из неравенства $a > b$ может не следовать неравенство $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Действительно, неравенство $5 > -3$ верно, однако неравенство $\frac{1}{5} < -\frac{1}{3}$ неверно.

В теоремах этого параграфа шла речь о строгих неравенствах. Нестрогие неравенства также обладают аналогичными свойствами. Например, если $a \geq b$ и c – любое число, то $a + c \geq b + c$.

1. Какое из чисел a или c больше, если известно, что $a > b$ и $b > c$?

2. Сформулируйте теорему о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа.

3. Сформулируйте следствие из теоремы о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа.

4. Сформулируйте теорему об умножении обеих частей неравенства на одно и то же число.

Упражнения

36. Известно, что $a > 6$. Верно ли неравенство:
1) $a > 4$; 2) $a \geq 5{,}9$; 3) $a > 7$?

37. Известно, что $a < b$ и $b < c$. Какое из утверждений верно:
1) $a > c$; 2) $a = c$; 3) $c > a$?

38. Запишите неравенство, которое получим, если:
1) к обеим частям неравенства $-3 < 4$ прибавим число 5; число -2;
2) из обеих частей неравенства $-10 < -6$ вычтем число 3; число -4;
3) обе части неравенства $7 > -2$ умножим на число 5; на число -1;
4) обе части неравенства $12 < 18$ разделим на число 6; на число -2.

39. Известно, что $a > b$. Запишите неравенство, которое получим, если:
1) к обеим частям данного неравенства прибавим число 8;
2) из обеих частей данного неравенства вычтем число -6;
3) обе части данного неравенства умножим на число 12;
4) обе части данного неравенства умножим на число $-\frac{1}{3}$;
5) обе части данного неравенства разделим на число $\frac{2}{7}$;
6) обе части данного неравенства разделим на число -4.

40. Известно, что $b > a$, $c < a$ и $d > b$. Сравните числа:
1) a и d; 2) b и c.

41. Расположите в порядке возрастания числа a, b, c и 0, если $a > b$, $0 < b$ и $0 > c$.

42. Известно, что $a > 4$. Сравните с нулём значение выражения:
1) $a - 3$; 3) $(a - 3)(a - 2)$; 5) $(1 - a)^2(4 - a)$.
2) $2 - a$; 4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;

43. Известно, что $-2 < b < 1$. Сравните с нулём значение выражения:
1) $b + 2$; 3) $b - 2$; 5) $(b + 2)(b - 4)^2$;
2) $1 - b$; 4) $(b - 1)(b - 3)$; 6) $(b - 3)(b + 3)(b - 2)^2$.

44. Дано: $a > b$. Сравните:
1) $a + 9$ и $b + 9$; 4) $-a$ и $-b$; 7) $2a - 3$ и $2b - 3$;
2) $b - 6$ и $a - 6$; 5) $-40b$ и $-40a$; 8) $5 - 8a$ и $5 - 8b$.
3) $1{,}8a$ и $1{,}8b$; 6) $\frac{a}{20}$ и $\frac{b}{20}$;

45. Известно, что $1 \leq m < 2$. Какие из неравенств верны:
1) $-1 \leq -m < -2$; 3) $-1 \geq -m > -2$;
2) $-2 < -m \leq -1$; 4) $-2 > -m \geq -1$?

46. Дано: $-3a > -3b$. Сравните:
1) a и b; 3) $b - 4$ и $a - 4$; 5) $3a + 2$ и $3b + 2$;
2) $\frac{2}{7}a$ и $\frac{2}{7}b$; 4) $-\frac{5}{9}b$ и $-\frac{5}{9}a$; 6) $-5a + 10$ и $-5b + 10$.

47. Известно, что $a > b$. Расположите в порядке убывания числа $a + 7$, $b - 3$, $a + 4$, $b - 2$, b.

48. Дано: $a < b$. Сравните:
1) $a - 5$ и b; 2) a и $b + 6$; 3) $a + 3$ и $b - 2$.

49. Сравните числа a и b, если известно, что:
1) $a > c$ и $c > b + 3$; 2) $a > c$ и $c - 1 > b + d^2$,
где c и d — некоторые числа.

50. Сравните числа a и 0, если:
1) $7a < 8a$; 3) $-6a > -8a$;
2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$; 4) $-0{,}02a > -0{,}2a$.

51. Дано: $a > -2$. Докажите, что:
1) $7a + 10 > -4$; 2) $-6a - 3 < 10$.

52. Дано: $b \leq 10$. Докажите, что:
1) $5b - 9 \leq 41$; 2) $1 - 2b > -21$.

53. Верно ли утверждение:
1) если $a > b$, то $a > -b$;
2) если $a > b$, то $2a > b$;
3) если $a > b$, то $2a + 1 > 2b$;
4) если $b > a$, то $\frac{b}{a} > 1$;
5) если $a > b + 2$ и $b - 3 > 4$, то $a > 9$;
6) если $a > b$, то $ab > b^2$;
7) поскольку $5 > 3$, то $5a^2 > 3a^2$;
8) поскольку $5 > 3$, то $5(a^2 + 1) > 3(a^2 + 1)$?

54. Запишите неравенство, которое получим, если:
1) обе части верного неравенства $a > 2$ умножим на a;
2) обе части верного неравенства $b < -1$ умножим на b;
3) обе части верного неравенства $m < -3$ умножим на $-m$;
4) обе части верного неравенства $c > -4$ умножим на c.

55. Запишите неравенство, которое получим, если:
1) обе части верного неравенства $a < -a^2$ разделим на a;
2) обе части верного неравенства $a > 2a^2$ разделим на a;
3) обе части верного неравенства $a^3 > a^2$ разделим на $-a$.

Упражнения для повторения

56. Известно, что $a^2 + b^2 = 18$ и $(a + b)^2 = 20$. Чему равно значение выражения ab?

57. У Дмитрия в 2 раза больше марок, чем у Петра, а у Петра в 2 раза больше марок, чем у Михаила. Какому из данных чисел может быть равным количество марок, имеющихся у Дмитрия?
1) 18;
2) 22;
3) 24;
4) 30.

58. Упростите выражение:
1) $\dfrac{a^2 + b^2}{2a^2 + 2ab} + \dfrac{b}{a + b}$;
2) $\dfrac{a^2 + 9}{a^2 - 9} - \dfrac{a}{a + 3}$;
3) $\dfrac{c + 1}{3c} : \dfrac{c^2 - 1}{6c^2}$;
4) $\dfrac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 - n^2} : (m + n)$.

59. Моторная лодка за одно и то же время может проплыть 48 км по течению реки или 36 км против течения. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения составляет 2 км/ч?

§ 3. Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения

Рассмотрим примеры.

1) Если с одного поля собрали не менее 40 т пшеницы, а со второго поля – не менее 45 т, то очевидно, что с двух полей вместе собрали не менее 85 т пшеницы.

2) Если длина прямоугольника не больше чем 70 см, а ширина – не больше чем 40 см, то очевидно, что его площадь не больше чем 2800 см^2.

Выводы из этих примеров интуитивно очевидны. Их справедливость подтверждают следующие теоремы.

Теорема 3.1
(о почленном сложении неравенств)

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Доказательство

Рассмотрим разность $(a + c) - (b + d)$. Имеем:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Так как $a > b$ и $c > d$, то разности $a - b$ и $c - d$ являются положительными числами. Следовательно, рассматриваемая разность является положительной, т. е. $a + c > b + d$. ◂

Аналогично доказывают такое свойство: ***если*** $a < b$ ***и*** $c < d$, ***то*** $a + c < b + d$.

Неравенства $a > b$ и $c > d$ (или $a < b$ и $c < d$) называют **неравенствами одного знака**, а неравенства $a > b$ и $c < d$ (или $a < b$ и $c > d$) – **неравенствами противоположных знаков**.

Говорят, что неравенство $a + c > b + d$ получено из неравенств $a > b$ и $c > d$ путём почленного сложения.

Теорема 3.1 означает, что ***при почленном сложении верных неравенств одного знака результатом является верное неравенство того же знака***.

Отметим, что теорема 3.1 справедлива и в случае почленного сложения трёх и более неравенств. Например, если $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ и $a_3 > b_3$, то $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

Теорема 3.2
(о почленном умножении неравенств)

Если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

Доказательство

Рассмотрим разность $ac - bd$. Имеем:

$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d)$.

Имеем: $a - b > 0$, $c - d > 0$, $c > 0$, $b > 0$. Следовательно, рассматриваемая разность является положительной. Из этого следует, что $ac > bd$. ◂

Аналогично доказывают такое свойство: ***если*** $a < b$, $c < d$ ***и*** a, b, c, d ***– положительные числа, то*** $ac < bd$.

Говорят, что неравенство $ac > bd$ получено из неравенств $a > b$ и $c > d$ путём почленного умножения.

Теорема 3.2 означает, что ***при почленном умножении верных неравенств одного знака, у которых левые и правые части — положительные числа, результатом является верное неравенство того же знака***.

Обратим внимание, что если из формулировки теоремы 3.2 убрать требование a, b, c, d – положительные числа, то из неравенств $a > b$ и $c > d$ может не следовать неравенство $ac > bd$. Действительно, рассмотрим два верных неравенства $-2 > -3$ и $4 > 1$. Умножив почленно эти неравенства, получим неверное неравенство $-8 > -3$.

Заметим, что теорема 3.2 справедлива и в случае почленного умножения трёх и более неравенств. Например, если a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 – положительные числа, причём $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, то $a_1a_2a_3 > b_1b_2b_3$.

Следствие

Если $a > b$ и a, b — положительные числа, то $a^n > b^n$, где n — натуральное число.

Доказательство

Запишем n верных неравенств $a > b$:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \ldots \\ a > b \end{array}\right\} n \text{ неравенств}$$

Так как a и b – положительные числа, то можем перемножить почленно n записанных неравенств. Получим $a^n > b^n$. ◂

Заметим, что все рассмотренные свойства неравенств справедливы и в случае нестрогих неравенств:

если $a \geq b$ и $c \geq d$, то $a + c \geq b + d$;

если $a \geq b$, $c \geq d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac \geq bd$;

если $a \geq b$ и a, b — положительные числа, то $a^n \geq b^n$, где n — натуральное число.

Вы знаете, что значения величин, полученные в результате измерений, не являются точными. Измерительные приборы позволяют установить, между какими числами находится точное значение величины[1]. Эти числа называют границами значения величины.

[1] Подробнее о приближённых значениях величин будет рассказано в § 16.

Пусть, например, в результате измерения ширины x и длины y прямоугольника было установлено, что 2,5 см < x < 2,7 см и 4,1 см < y < 4,3 см. Тогда с помощью теоремы 3.2 можно оценить площадь прямоугольника. Имеем:

$$\times\begin{array}{c}2{,}5\text{ см} < x < 2{,}7\text{ см}\\ 4{,}1\text{ см} < y < 4{,}3\text{ см}\\ \hline 10{,}25\text{ см}^2 < xy < 11{,}61\text{ см}^2.\end{array}$$

Вообще, если известны значения границ величин, то, используя свойства числовых неравенств, можно найти границы значения выражения, содержащего эти величины, т. е. **оценить** его значение.

Пример 1. Дано: $6 < a < 8$ и $10 < b < 12$. Оцените значение выражения:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$.

Решение.

1) Применив теорему о почленном сложении неравенств, получим:

$$+\begin{array}{c}6 < a < 8\\ 10 < b < 12\\ \hline 16 < a + b < 20.\end{array}$$

2) Умножив каждую часть неравенства $10 < b < 12$ на -1, получим: $-10 > -b > -12$ или $-12 < -b < -10$. Учитывая, что $a - b = a + (-b)$, далее получаем:

$$+\begin{array}{c}6 < a < 8\\ -12 < -b < -10\\ \hline -6 < a - b < -2.\end{array}$$

3) Так как $a > 6$ и $b > 10$, то a и b принимают положительные значения. Применив теорему о почленном умножении неравенств, получим:

$$\times\begin{array}{c}6 < a < 8\\ 10 < b < 12\\ \hline 60 < ab < 96.\end{array}$$

4) Так как $10 < b < 12$, то $\frac{1}{10} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12}$ или $\frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$. Учитывая, что $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, получаем:

$$\times\begin{array}{c}6 < a < 8\\ \frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}\\ \hline \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}.\end{array}$$

5) Умножим каждую часть неравенства $6 < a < 8$ на 3, а каждую часть неравенства $10 < b < 12$ на $-\frac{1}{2}$.

Получим два верных неравенства:

$18 < 3a < 24$ и $-5 > -\frac{1}{2}b < -6$.

Имеем:

$$+\begin{array}{c} 18 < 3a < 24 \\ -6 < -\frac{1}{2}b < -5 \\ \hline 12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19. \end{array}$$

Ответ: 1) $16 < a + b < 20$; 2) $-6 < a - b < -2$; 3) $60 < ab < 96$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$; 5) $12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19$. ◄

Пример 2. Докажите, что $\sqrt{24} + \sqrt{47} < 12$.

Решение. Так как $\sqrt{24} < 5$ и $\sqrt{47} < 7$, то $\sqrt{24} + \sqrt{47} < 5 + 7 = 12$. ◄

1. Сформулируйте теорему о почленном сложении неравенств.
2. Поясните, какие неравенства называют неравенствами одного знака, а какие — неравенствами противоположных знаков.
3. Сформулируйте теорему о почленном умножении неравенств.
4. Сформулируйте следствие из теоремы о почленном умножении неравенств.

Упражнения

60. Запишите неравенство, которое получим, если:
1) сложим почленно неравенства $10 > -6$ и $8 > 5$;
2) умножим почленно неравенства $2 < 7$ и $3 < 4$;
3) умножим почленно неравенства $1{,}2 > 0{,}9$ и $5 > \frac{1}{3}$.

61. Запишите неравенство, которое получим, если:
1) сложим почленно неравенства $-9 < -4$ и $-6 < 4$;
2) умножим почленно неравенства $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$ и $24 < 27$.

62. Дано: $-3 < a < 4$. Оцените значение выражения:

1) $2a$;	3) $a + 2$;	5) $3a + 1$;	7) $-4a$;
2) $\frac{a}{3}$;	4) $a - 1$;	6) $-a$;	8) $-5a + 3$.

63. Дано: $2 < b < 6$. Оцените значение выражения:

1) $\frac{1}{2}b$; 2) $b - 6$; 3) $2b + 5$; 4) $4 - b$.

64. Известно, что $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$. Оцените значение выражения:

1) $3\sqrt{7}$; 2) $-2\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{7} + 1{,}3$; 4) $0{,}1\sqrt{7} + 0{,}3$.

65. Дано: $5 < a < 6$ и $4 < b < 7$. Оцените значение выражения:

1) $a + b$; 2) ab; 3) $a - b$.

66. Известно, что $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ и $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$. Оцените значение выражения:

1) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{15}$.

67. Дано: $2 < x < 4$. Оцените значение выражения $\frac{1}{x}$.

68. Оцените среднее арифметическое значений a и b, если известно, что $2{,}5 < a < 2{,}6$ и $3{,}1 < b < 3{,}2$.

69. Оцените периметр равнобедренного треугольника с основанием a см и боковой стороной b см, если 10 см $< a <$ 14 см и 12 см $< b <$ 18 см.

70. Оцените периметр параллелограмма со сторонами a см и b см, если 15 см $\le a \le$ 19 см и 6 см $\le b \le$ 11 см.

71. Верно ли утверждение:

1) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 9$;
2) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 8$;
3) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 9{,}2$;
4) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a - b > -5$;
5) если $a > 2$ и $b > 7$, то $b - a > 5$;
6) если $a > 2$ и $b > 7$, то $ab > 13$;
7) если $a > 2$ и $b > 7$, то $3a + 2b > 20$;
8) если $a > 2$ и $b < -7$, то $a - b > 9$;
9) если $a < 2$ и $b < 7$, то $ab < 14$;
10) если $a > 2$, то $a^2 > 4$;
11) если $a < 2$, то $a^2 < 4$;
12) если $a > 2$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$;
13) если $a < 2$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{2}$;
14) если $-3 < a < 3$, то $-\frac{1}{3} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$?

72. Дано: $a > 2{,}4$ и $b > 1{,}6$. Сравните:

1) $a + \frac{3}{4}b$ и 3,6; 2) $(a + b)^2$ и 16; 3) $(a - 0{,}4)(b + 1{,}4)$ и 6.

73. Известно, что $a > 3$ и $b > -2$. Докажите, что $5a + 4b > 7$.

74. Известно, что $a > 5$ и $b < 2$. Докажите, что $6a - 7b > 16$.

75. Дано: $5 < a < 8$ и $3 < b < 6$. Оцените значение выражения:

1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{2b}{3a}$.

76. Дано: $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$. Оцените значение выражения:

1) $6x + 14y$; 2) $28y - 12x$; 3) $\frac{y}{x}$.

77. Сравните значения выражений:

1) 2^{24} и 9^8; 2) $0{,}3^{20}$ и $0{,}1^{10}$; 3) $0{,}0015^{10}$ и $0{,}2^{40}$.

78. Докажите, что периметр четырёхугольника больше суммы его диагоналей.

79. Докажите, что каждая диагональ выпуклого четырёхугольника меньше его полупериметра.

80. Докажите, что сумма двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника меньше суммы его диагоналей.

81. Докажите утверждение:

1) если $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$;

2) если $a > 0$, $b > 0$ и $a^2 > b^2$, то $a > b$.

82. Докажите, что если $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$, то $a < b$.

83. Известно, что $b > 0$ и $a > b$. Является ли верным при всех указанных значениях a и b неравенство:

1) $a^2 + a > b^2 + b$; 3) $2 - a^2 < 2 - b^2$;

2) $a^2 - a > b^2 - b$; 4) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$?

84. Докажите, что:

1) $\sqrt{27} + \sqrt{65} > 13$; 3) $\sqrt{65} - \sqrt{35} > 2$;

2) $\sqrt{14} + \sqrt{15} < 8$; 4) $\sqrt{99} - \sqrt{82} < 1$.

85. Докажите, что:

1) $\sqrt{55} + \sqrt{35} > \sqrt{120}$; 2) $\sqrt{119} - \sqrt{67} < 3$.

86. Сравните:

1) $\sqrt{10} + \sqrt{6}$ и $\sqrt{11} + \sqrt{5}$; 3) $\sqrt{15} - \sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$;

2) $2 + \sqrt{11}$ и $\sqrt{5} + \sqrt{10}$; 4) $\sqrt{21} + \sqrt{20}$ и 9.

87. Сравните:

1) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ и $\sqrt{7} + \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26} - \sqrt{2}$ и $\sqrt{14}$.

Упражнения для повторения

88. Упростите выражение:

1) $\frac{x-3}{x+3}\cdot\left(x+\frac{x^2}{3-x}\right)$;   2) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a^2-b^2}$.

89. Упростите выражение:

1) $6\sqrt{3}+\sqrt{27}-3\sqrt{75}$;   2) $\left(\sqrt{50}-3\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$;   3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$.

90. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\frac{x^2}{x+4}$;   2) $\frac{x-4}{x^2-4}$;   3) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$;   4) $\frac{4}{x-4}+\frac{1}{x}$?

91. В саду растут яблони и вишни, причём вишни составляют 20 % всех деревьев. Сколько процентов составляет количество яблонь от количества вишен?

Готовимся к изучению новой темы

92. Равносильны ли уравнения:

1) $4x+6=2x-3$ и $4x+3=2x-6$;

2) $8x-4=0$ и $2x-1=0$;

3) $x^2+2x-3=0$ и $x^2+x=3-x$;

4) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ и $x^2-1=0$;

5) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ и $x-1=0$;

6) $x^2+1=0$ и $0x=5$?

Повторите содержание п. 20, 21 на с. 268–269.

Учимся делать нестандартные шаги

93. Докажите, что для нечётных чисел a, b, c, d, e, f не может выполняться равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$.

Когда сделаны уроки

О некоторых способах доказательства неравенств

В § 1 было доказано несколько неравенств. Мы использовали такой приём: рассматривали разность левой и правой частей неравенства и сравнивали её с нулём.

Однако существует и ряд других способов доказательства неравенств. Познакомимся с некоторыми из них.

Рассуждения «от противного»

Само название этого метода отражает его суть.

Пример 1. Для любых чисел a_1, a_2, b_1, b_2 докажите неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2). \qquad (*)$$

Решение. Пусть доказываемое неравенство неверно. Тогда найдутся такие числа a_1, a_2, b_1, b_2, что будет верным неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 > (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

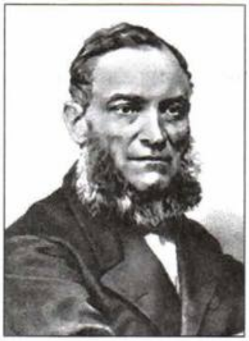
Отсюда

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 > a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2;$$
$$2a_1b_1a_2b_2 > a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2;$$
$$a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 < 0;$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 < 0.$$

Последнее неравенство неверно. Полученное противоречие означает, что неравенство (*) верно. ◄

Огюстен Луи Коши (1789–1857)

Выдающийся французский математик, автор более 800 научных трудов.



Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889)

Выдающийся математик XIX в. В течение многих лет был вице-президентом Петербургской академии наук.

Неравенство (*) является частным случаем более общего неравенства:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2). \quad (**)$$

Неравенство (**) называют *неравенством Коши – Буняковского*. С его доказательством вы можете ознакомиться, участвуя в проектной работе (см. с. 278).

Метод использования очевидных неравенств

__Пример 2.__ Для любых чисел a, b, c докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac.$$

Решение. Очевидно, что при любых значениях a, b, c выполняется такое неравенство:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0.$$

Отсюда

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \ge 0;$$
$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + 2bc + 2ac;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac. ◄$$

Метод применения ранее доказанного неравенства

В § 1 мы доказали, что для любых $a \ge 0$ и $b \ge 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}.$$

Его называют *неравенством Коши для двух чисел*.

Рассмотрим, как можно использовать неравенство Коши при доказательстве других неравенств.

__Пример 3.__ Докажите, что для положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geq 4.$$

Решение. Применим неравенство Коши для положительных чисел a и $\frac{1}{b}$. Получаем:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{b}}.$$

Отсюда $a+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Аналогично доказываем, что $b+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Применив теорему о почленном умножении неравенств, получим:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geq 4\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Отсюда $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geq 4$. ◄

Метод геометрической интерпретации

__Пример 4.__ Докажите неравенство

$$\sqrt{99 \cdot 101}+\sqrt{98 \cdot 102}+\ldots+\sqrt{2 \cdot 198}+\sqrt{1 \cdot 199} < \frac{100^2 \pi}{4}.$$

Решение. Рассмотрим четверть окружности с центром O радиуса 1. Впишем в неё ступенчатую фигуру, составленную из 99 прямоугольников, так, как показано на рисунке 4. Имеем: $OA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{98}A_{99} = \frac{1}{100}$.

Площадь первого прямоугольника:

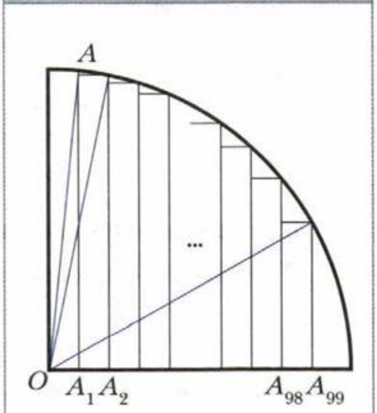
$$S_1 = OA_1 \cdot AA_1 = OA_1 \cdot \sqrt{1-OA_1^2} =$$

$$= \frac{1}{100}\sqrt{1-\frac{1}{100^2}} = \frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2}.$$

Для второго прямоугольника имеем:

$$S_2 = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{2}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2}$$ и т. д.

Рис. 4



$$S_{99} = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2}.$$

Площадь ступенчатой фигуры меньше площади четверти круга, т. е.

$$\frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2} + \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2} + \ldots + \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2} < \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство. ◄

Упражнения

1. Докажите неравенство:

1) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$, если $a > 0$ и $b > 0$;

2) $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $c \geq 0$;

3) $(a^3 + b)(a + b^3) \geq 4a^2b^2$, если $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

4) $(ab + 1)(a + b) \geq 4ab$, если $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

5) $(a + 2)(b + 5)(c + 10) \geq 80\sqrt{abc}$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $c \geq 0$;

6) $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 4$, если $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

7) $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq 2^n$, если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – положительные числа, произведение которых равно единице.

§ 4. Неравенства с одной переменной

Рассмотрим задачу. Одна из сторон параллелограмма равна 7 см. Какой должна быть длина соседней стороны, чтобы периметр параллелограмма был больше 44 см?

Пусть искомая сторона равна x см. Тогда периметр параллелограмма равен $(14 + 2x)$ см. Неравенство $14 + 2x > 44$ является математической моделью задачи о периметре параллелограмма.

Если в это неравенство вместо переменной x подставить, например, число 16, то получим верное числовое неравенство $14 + 32 > 44$. В таком случае говорят, что число 16 является **решением неравенства** $14 + 2x > 44$.

Определение

Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Так, каждое из чисел 15,1; 20; $10\sqrt{3}$ является решением неравенства $14 + 2x > 44$, а число 10 не является его решением.

Замечание. Определение решения неравенства аналогично определению корня уравнения. Однако не принято говорить «корень неравенства».

Определение

Решить неравенство означает найти все его решения или доказать, что решений не существует.

Все решения неравенства образуют **множество решений неравенства**. Если неравенство решений не имеет, то говорят, что множеством его решений является **пустое множество**. Напомним, что пустое множество обозначают символом $\varnothing$.

Таким образом, можно сказать, что ***решить неравенство означает найти множество его решений***.

Например, в задаче «решите неравенство $x^2 > 0$» ответ будет таким: «все действительные числа, кроме числа 0».

Очевидно, что неравенство $|x| < 0$ решений не имеет, т. е. множеством его решений является пустое множество.

Определение

Неравенства называют равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.

Приведём несколько примеров.

Неравенства $x^2 \le 0$ и $|x| \le 0$ равносильны. Действительно, каждое из них имеет единственное решение $x = 0$.

Неравенства $x^2 > -1$ и $|x| > -2$ равносильны, так как множеством решений каждого из них является множество действительных чисел.

Так как каждое из неравенств $\sqrt{x} < -1$ и $0x < -3$ решений не имеет, то они также являются равносильными.

1. Что называют решением неравенства с одной переменной?
2. Что означает решить неравенство?
3. Что образуют все решения неравенства?
4. Когда множеством решений неравенства является пустое множество?
5. Какие неравенства называют равносильными?

Упражнения

94. Какие из чисел -4; $-0{,}5$; 0; $\frac{1}{3}$; 2 являются решениями неравенства:

1) $x > \frac{1}{6}$; 3) $3x > x - 1$; 5) $\sqrt{x-1} > 1$;

2) $x \le 5$; 4) $x^2 - 9 \le 0$; 6) $\frac{1}{x} > 1$?

95. Какое из данных чисел является решением неравенства $(x - 2)^2(x - 5) > 0$:

1) 3; 2) 2; 3) 6; 4) -1?

96. Является ли решением неравенства $6x + 1 \le 2 + 7x$ число:

1) $-0{,}1$; 2) -2; 3) 0; 4) -1; 5) 2?

97. Назовите любые два решения неравенства $x + 5 > 2x + 3$.

98. Является ли число 1,99 решением неравенства $x < 2$? Существуют ли решения данного неравенства, которые больше 1,99? В случае утвердительного ответа приведите пример такого решения.

99. Является ли число 4,001 решением неравенства $x > 4$? Существуют ли решения данного неравенства, которые меньше 4,001? В случае утвердительного ответа приведите пример такого решения.

100. Множеством решений какого из данных неравенств является пустое множество:

1) $(x - 3)^2 > 0$; 3) $(x - 3)^2 < 0$;

2) $(x - 3)^2 \ge 0$; 4) $(x - 3)^2 \le 0$?

101. Какие из данных неравенств не имеют решений:

1) $0x > -2$; 2) $0x < 2$; 3) $0x < -2$; 4) $0x > 2$?

102. Множеством решений какого из данных неравенств является множество действительных чисел:

1) $0x > 1$; 2) $0x > 0$; 3) $0x > -1$; 4) $x + 1 > 0$?

103. Решением какого из данных неравенств является любое действительное число:

1) $x^2 > 0$; 2) $x > -x$; 3) $-x^2 \le 0$; 4) $\sqrt{x} \ge 0$?

104. Среди данных неравенств укажите неравенство, решением которого является любое действительное число, и неравенство, не имеющее решений:

1) $\frac{x^2+1}{x^2} \ge 0$; 3) $\frac{x^2-1}{x^2-1} \ge 1$;

2) $\frac{x^2+1}{x^2+1} < 1$; 4) $\frac{x^2}{x^2+1} \ge 0$.

105. Решите неравенство:

1) $\frac{2}{x^2}+2>0$;
2) $(x+2)^2>0$;
3) $(x+2)^2\le 0$;
4) $\frac{x+2}{x+2}>0$;
5) $\frac{x+2}{x+2}>\frac{2}{3}$;
6) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2>0$;
7) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2\ge 0$;
8) $x+\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x^2}+2$;
9) $|x|\ge -x^2$;
10) $|x|>-x^2$;
11) $|x|>x$;
12) $|x|\ge -x$.

106. Найдите множество решений неравенства:

1) $|x|>0$;
2) $|x|\le 0$;
3) $|x|<0$;
4) $|x|\le -1$;
5) $|x|>-3$;
6) $\left|\frac{1}{x}\right|>-3$.

107. Равносильны ли неравенства:

1) $\frac{1}{x}<1$ и $x>1$;
2) $x^2\ge x$ и $x\ge 1$;
3) $(x+5)^2<0$ и $|x-4|<0$;
4) $\sqrt{x}\le 0$ и $x^4\le 0$?

Упражнения для повторения

108. Решите уравнение:

1) $9-7(x+3)=5-6x$;
2) $\frac{x+3}{2}-\frac{x-4}{7}=1$;
3) $(x+7)^2-(x-2)^2=15$;
4) $5x-2=3(3x-1)-4x-4$;
5) $6x+(x-2)(x+2)=(x+3)^2-13$;
6) $(x+6)(x-1)-(x+3)(x-4)=5x$.

109. Велосипедист проехал от села к озеру и вернулся обратно, потратив на весь путь 1 ч. Из села к озеру он ехал со скоростью 15 км/ч, а возвращался со скоростью 10 км/ч. Найдите расстояние от села до озера.

§ 5. Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки

Свойства числовых равенств помогали нам решать уравнения. Аналогично свойства числовых неравенств помогут решать неравенства.

Решая уравнение, мы заменяли его другим, более простым уравнением, равносильным данному. По аналогичной схеме решают и неравенства.

При замене уравнения на равносильное ему уравнение используют теоремы о перенесении слагаемых из одной части уравнения в другую и об умножении обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число.

Аналогичные правила применяют и при решении неравенств с одной переменной.

- **Если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.**
- **Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.**
- **Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.**

С помощью этих правил решим неравенство, полученное в задаче о периметре параллелограмма (см. § 4).

Имеем: $14 + 2x > 44$.

Переносим слагаемое 14 в правую часть неравенства:

$$2x > 44 - 14.$$

Отсюда $2x > 30$.

Разделив обе части неравенства на 2, получим:

$$x > 15.$$

Заметим, что полученное неравенство равносильно исходному неравенству. Множество его решений состоит из всех чисел, которые больше 15. Это множество называют **числовым промежутком** и обозначают так: $(15; +\infty)$ (читают: «промежуток от 15 до плюс бесконечности»).

В этой задаче ответ может быть записан в такой форме: $(15; +\infty)$.

Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x > 15$, расположены справа от точки, изображающей число 15, и образуют луч, у которого «выколото» начало (рис. 5).

Рис. 5

Заметим, что для изображения на рисунке числового промежутка используют два способа: с помощью либо штриховки (рис. 5, *а*), либо дуги (рис. 5, *б*). Мы будем использовать второй способ.

Пример 1. Решите неравенство $3 + \frac{x}{2} \leq 7 + x$.

Решение. Перенесём слагаемое x из правой части неравенства в левую, а слагаемое 3 – из левой части в правую и приведём подобные члены:

$$-x + \frac{x}{2} \leq 7 - 3;$$

$$-\frac{x}{2} \leq 4.$$

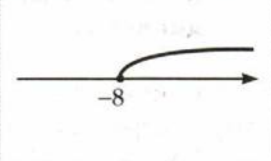
Умножив обе части последнего неравенства на –2, получим:

$$x \geq -8.$$

Множеством решений этого неравенства является числовой промежуток, который обозначают так: $[-8; +\infty)$ (читают: «промежуток от –8 до плюс бесконечности, включая –8»).

Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x \geq -8$, образуют луч (рис. 6).

Рис. 6



Ответ: $[-8; +\infty)$. ◄

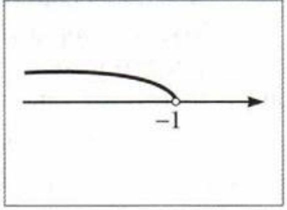
Пример 2. Решите неравенство $2(2 - 3x) > 3(x + 6) - 5$.

Решение. Запишем цепочку неравенств, равносильных данному:

$$4 - 6x > 3x + 18 - 5;$$
$$4 - 6x > 3x + 13;$$
$$-3x - 6x > -4 + 13;$$
$$-9x > 9;$$
$$x < -1.$$

Множеством решений последнего неравенства является числовой промежуток, который обозначают так: $(-\infty; -1)$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до –1»). Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x < -1$, расположены слева от точки –1 (рис. 7) и образуют луч, у которого «выколото» начало.

Рис. 7



Ответ: $(-\infty; -1)$. ◄

Пример 3. Решите неравенство $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} \leq \frac{1}{6}$.

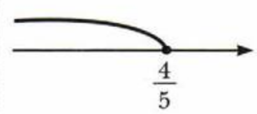
Решение. Запишем цепочку равносильных неравенств:

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} \leq 6 \cdot \frac{1}{6};$$
$$3x - 3 + 2x \leq 1;$$
$$5x \leq 4;$$

$$x \le \frac{4}{5}.$$

Множеством решений последнего неравенства является числовой промежуток, который обозначают так: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до $\frac{4}{5}$, включая $\frac{4}{5}$»). Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x \le \frac{4}{5}$, образуют луч (рис. 8).

Рис. 8



Ответ: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$. ◂

Пример 4. Решите неравенство $3(2x - 1) + 7 \ge 2(3x + 1)$.
Решение. Имеем:

$$6x - 3 + 7 \ge 6x + 2;$$
$$6x - 6x \ge 2 - 4;$$
$$0x \ge -2.$$

Последнее неравенство при любом значении x превращается в верное числовое неравенство $0 \ge -2$. Следовательно, искомое множество решений совпадает с множеством действительных чисел.

Ответ: x – любое число. ◂

Этот ответ можно записать иначе: $(-\infty; +\infty)$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до плюс бесконечности»). Этот числовой промежуток называют **числовой прямой**.

Пример 5. Решите неравенство $4(x - 2) - 1 < 2(2x - 9)$.
Решение. Имеем:

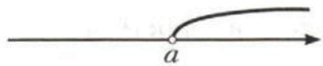
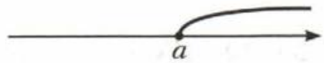
$$4x - 8 - 1 < 4x - 18;$$
$$4x - 4x < 9 - 18;$$
$$0x < -9.$$

Полученное неравенство при любом значении x превращается в неверное числовое неравенство $0 < -9$.

В этой задаче ответ можно записать одним из способов: решений нет либо $\varnothing$. ◂

Каждое из неравенств, рассмотренных в примерах 1–5, сводилось к равносильному неравенству одного из четырёх видов: $ax > b$, $ax < b$, $ax \ge b$, $ax \le b$, где x – переменная, a и b – некоторые числа. Такие неравенства называют **линейными неравенствами с одной переменной**.

Приведём таблицу обозначений и изображений изученных числовых промежутков.

Неравенство	Промежуток	Изображение
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	
$x \leq a$	$(-\infty; a]$	

1. Сформулируйте правила, с помощью которых можно получить неравенство, равносильное данному.

2. Какие неравенства называют линейными неравенствами с одной переменной?

3. Как записывают, читают, называют и изображают промежуток, являющийся множеством решений неравенства вида: $x > a$? $x < a$? $x \geq a$? $x \leq a$?

4. Решением неравенства является любое число. Как в таком случае записывают, читают и называют промежуток, являющийся множеством решений неравенства?

Упражнения

110. Изобразите на координатной прямой промежуток:
1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5)$; 4) $(-\infty; -5]$.

111. Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, который задаётся неравенством:
1) $x < 8$; 2) $x \leq -4$; 3) $x \geq -1$; 4) $x > 0$.

112. Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, который задаётся неравенством:
1) $x \leq 0$; 2) $x \geq \frac{1}{3}$; 3) $x > -1{,}4$; 4) $x < 16$.

113. Укажите наименьшее целое число, принадлежащее промежутку:

1) $(6; +\infty)$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-3{,}4; +\infty)$; 4) $[-0{,}9; +\infty)$.

114. Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:

1) $(-\infty; -4)$; 2) $(-\infty; -6{,}2]$; 3) $(-\infty; 1]$; 4) $(-\infty; -1{,}8)$.

115. Каким из данных промежутков принадлежит число -7:

1) $(-\infty; -7)$; 2) $[-7; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-\infty; -6)$?

116. Какому из данных промежутков не принадлежит число 9:

1) $(8{,}99; +\infty)$; 2) $(-\infty; 10)$; 3) $(-\infty; 8{,}99]$; 4) $[9; +\infty)$?

117. Решите неравенство:

1) $6x > 18$; 6) $-10x < 0$; 11) $4 - x < 5$;

2) $-2x \geq 10$; 7) $2\frac{1}{4}x \leq -1\frac{4}{5}$; 12) $5 - 8x \geq 6$;

3) $\frac{1}{3}x < 9$; 8) $-7x > \frac{14}{15}$; 13) $12 + 4x \geq 6x$;

4) $0{,}1x \geq 0$; 9) $7x - 2 > 19$; 14) $36 - 2x < 4x$;

5) $\frac{3}{4}x > 24$; 10) $5x + 16 \leq 6$; 15) $\frac{x+2}{5} < 2$.

118. Решите неравенство:

1) $5x < 30$; 5) $-3x < \frac{6}{7}$; 9) $13 - 6x \geq -23$;

2) $-4x \leq -16$; 6) $-2\frac{1}{3}x > 1\frac{5}{9}$; 10) $5 - 9x > 16$;

3) $\frac{2}{3}x \leq 6$; 7) $4x + 5 > -7$; 11) $3x + 2 \leq -7x$;

4) $-12x \geq 0$; 8) $9 - x \geq 2x$; 12) $\frac{x-3}{4} > -1$.

119. Решите неравенство:

1) $0x > 10$; 3) $0x > -8$; 5) $0x \geq 1$; 7) $0x \leq 0$;

2) $0x < 15$; 4) $0x < -3$; 6) $0x \leq 2$; 8) $0x > 0$.

120. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $5x \geq 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$.

121. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $8x \leq -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$.

122. При каких значениях a выражение $6a + 1$ принимает отрицательные значения?

123. При каких значениях b выражение $7 - 2b$ принимает положительные значения?

124. При каких значениях m значения выражения $2 - 4m$ не меньше -22?

125. При каких значениях n значения выражения $12n - 5$ не больше -53?

126. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{4x+20}$; 2) $\sqrt{5-14x}$; 3) $\frac{10}{\sqrt{4x+10}}$?

127. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{13 - 2x}$;
2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{-x-1}}$.

128. Решите неравенство:

1) $8x + 2 < 9x - 3$;
2) $6 - 6x > 10 - 4x$;
3) $6y + 8 \leq 10y - 8$;
4) $3 - 11y \geq -3y + 6$;
5) $-8p - 2 < 3 - 10p$;
6) $3m - 1 \leq 1{,}5m + 5$.

129. Решите неравенство:

1) $4 + 11x > 7 + 12x$;
2) $35x - 28 \leq 32x + 2$;
3) $3x - 10 < 6x + 2$;
4) $6x - 3 \geq 2x - 25$.

130. При каких значениях c значения двучлена $9c - 2$ не больше чем соответствующие значения двучлена $4c + 4$?

131. При каких значениях k значения двучлена $11k - 3$ не меньше чем соответствующие значения двучлена $15k - 13$?

132. Решите неравенство:

1) $\dfrac{4x}{3} + \dfrac{x}{2} < 11$;
2) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3x}{4} \geq \dfrac{1}{6}$;
3) $\dfrac{5x}{7} - x > -4$;
4) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{4} \leq x$.

133. Решите неравенство:

1) $\dfrac{y}{6} - \dfrac{5y}{4} < 1$;
2) $\dfrac{x}{10} - \dfrac{x}{5} > -2$.

134. Решите неравенство:

1) $3 - 5(2x + 4) \geq 7 - 2x$;
2) $6x - 3(x - 1) \leq 2 + 5x$;
3) $x - 2(x - 1) \geq 10 + 3(x + 4)$;
4) $2(2x - 3{,}5) - 3(2 - 3x) < 6(1 - x)$;
5) $(x + 1)(x - 2) \leq (x - 3)(x + 3)$;
6) $(4x - 3)^2 + (3x + 2)^2 \geq (5x + 1)^2$;
7) $\dfrac{2x - 1}{4} \geq \dfrac{3x - 5}{5}$;
8) $\dfrac{3x + 7}{4} - \dfrac{5x - 2}{2} < x$;
9) $(x - 5)(x + 1) \leq 3 + (x - 2)^2$;
10) $\dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{x - 3}{3} > 2 + \dfrac{x}{6}$;
11) $(6x - 1)^2 - 4x(9x - 3) \leq 1$;
12) $\dfrac{x - 3}{9} - \dfrac{x + 4}{4} > \dfrac{x - 8}{6}$.

135. Найдите множество решений неравенства:

1) $3(4x+9)+5>7(8-x)$;

2) $(2-y)(3+y) \le (4+y)(6-y)$;

3) $(y+3)(y-5)-(y-1)^2>-16$;

4) $\frac{3x-7}{5}-1 \ge \frac{2x-6}{3}$;

5) $\frac{2x}{3}-\frac{x-1}{6}-\frac{x+2}{2}<0$;

6) $\frac{y-1}{2}-\frac{2y+1}{8}-y<2$.

136. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $7(x+2)-3(x-8)<10$;

2) $(x-4)(x+4)-5x>(x-1)^2-17$.

137. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $\frac{4x+13}{10}-\frac{5+2x}{4}>\frac{6-7x}{20}-2$;

2) $(x-1)(x+1)-(x-4)(x+2) \ge 0$.

138. Сколько целых отрицательных решений имеет неравенство

$x-\frac{x+7}{4}-\frac{11x+30}{12}<\frac{x-5}{3}$?

139. Сколько натуральных решений имеет неравенство $\frac{2-3x}{4} \ge \frac{1}{5}-\frac{5x+6}{8}$?

140. При каких значениях x верно равенство:

1) $|x-5|=x-5$; 2) $|2x+14|=-2x-14$?

141. При каких значениях y верно равенство:

1) $\frac{|y+7|}{y+7}=1$; 2) $\frac{|6-y|}{y-6}=1$?

142. При каких значениях a уравнение:

1) $x^2+3x-a=0$ не имеет корней;

2) $2x^2-8x+5a=0$ имеет хотя бы один действительный корень?

143. При каких значениях b уравнение:

1) $3x^2-6x+b=0$ имеет два различных действительных корня;

2) $x^2-x-2b=0$ не имеет корней?

144. Турист проплыл на лодке некоторое расстояние по течению реки, а потом вернулся обратно, потратив на всё путешествие не более пяти часов. Скорость лодки в стоячей воде равна 5 км/ч, а скорость течения – 1 км/ч. Какое наибольшее расстояние мог проплыть турист по течению реки?

145. Берут четыре последовательных целых числа и составляют разность произведений крайних и средних чисел. Существуют ли такие четыре последовательных целых числа, для которых эта разность больше нуля?

146. В коробке находятся синие и жёлтые шары. Количество синих шаров относится к количеству жёлтых как 3 : 4. Какое наибольшее количество синих шаров может быть в коробке, если всего шаров не больше 44?

147. В саду растут яблони, вишни и сливы, количества которых относятся как 5 : 4 : 2 соответственно. Каким может быть наименьшее количество вишен, если всего деревьев в саду не менее 120?

148. Стороны треугольника равны 8 см, 14 см и a см, где a – натуральное число. Какое наибольшее значение может принимать a?

149. Сумма трёх последовательных натуральных чётных чисел не меньше чем 85. Найдите наименьшие три числа, удовлетворяющие этому условию.

150. Сумма трёх последовательных натуральных чисел, кратных 5, не больше 100. Какие наибольшие три числа удовлетворяют этому условию?

151. При каких значениях x определена функция:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{1}{x-2}$;
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+9}} - \frac{8}{|x|-2}$;
2) $f(x) = \sqrt{24-8x} + \frac{6}{x^2-16}$;
4) $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{4}{x^2-1}$?

152. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{9-x} + \frac{10}{x+3}$;
2) $\frac{6}{\sqrt{3x-21}} + \frac{9}{x^2-64}$?

153. Решите уравнение:

1) $|x-3| + x = 15$;
2) $|x+1| - 4x = 14$;
3) $|3x-12| - 2x = 1$;
4) $|x+2| - x = 1$.

154. Решите уравнение:

1) $|x+5| + 2x = 7$;
2) $|3-2x| - x = 9$.

155. Постройте график функции:

1) $y = |x-2|$;
2) $y = |x+3| - 1$;
3) $y = |x-1| + x$.

156. Постройте график функции:

1) $y = |x+4|$;
2) $y = |x-5| + 2$;
3) $y = |2x-6| - x$.

157. При каких значениях a уравнение:

1) $4x + a = 2$ имеет положительный корень;
2) $(a+6)x = 3$ имеет отрицательный корень;
3) $(a-1)x = a^2 - 1$ имеет единственный положительный корень?

158. При каких значениях m уравнение:

1) $2 + 4x = m - 6$ имеет неотрицательный корень;
2) $mx = m^2 - 7m$ имеет единственный отрицательный корень?

159. Найдите все значения a, при которых имеет два различных действительных корня уравнение:

1) $ax^2 + 2x - 1 = 0$;
2) $(a + 1)x^2 - (2a - 3)x + a = 0$;
3) $(a - 3)x^2 - 2(a - 5)x + a - 2 = 0$.

160. Найдите все значения a, при которых не имеет корней уравнение $(a - 2)x^2 + (2a + 1)x + a = 0$.

161. Существует ли такое значение a, при котором не имеет решений неравенство (в случае утвердительного ответа укажите это значение):

1) $ax > 3x + 4$; 2) $(a^2 - a - 2)x \le a - 2$?

162. Существует ли такое значение a, при котором любое число является решением неравенства (в случае утвердительного ответа укажите это значение):

1) $ax > -1 - 7x$; 2) $(a^2 - 16)x \ge a + 4$?

163. Для каждого значения a решите неравенство:

1) $ax > 0$; 3) $ax \ge a$; 5) $(a - 2)x > a^2 - 4$;
2) $ax < 1$; 4) $2(x - a) < ax - 4$; 6) $(a + 3)x \le a^2 - 9$.

164. Для каждого значения a решите неравенство:

1) $a^2x \le 0$; 2) $a + x < 2 - ax$; 3) $(a + 4)x > 1$.

Упражнения для повторения

165. Решите уравнение:

1) $6x - 5x^2 = 0$; 4) $3x^2 + 8x - 3 = 0$;
2) $25x^2 = 81$; 5) $x^2 + x - 12 = 0$;
3) $4x^2 - 7x - 2 = 0$; 6) $2x^2 + 6x + 7 = 0$.

166. Известно, что m и n – последовательные целые числа. Какое из следующих утверждений всегда является верным:

1) произведение mn больше чем m;
2) произведение mn больше чем n;
3) произведение mn является чётным числом;
4) произведение mn является нечётным числом?

167. Сравните значения выражений:

1) $3\sqrt{98}$ и $4\sqrt{72}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{68}$ и $\frac{4}{3}\sqrt{45}$; 3) $\frac{1}{6}\sqrt{108}$ и $6\sqrt{\frac{1}{12}}$.

168. Чтобы наполнить бассейн водой через одну трубу, требуется в 1,5 раза больше времени, чем для того, чтобы наполнить его через вторую трубу. Если же открыть одновременно обе трубы, то бассейн наполнится за 6 ч. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу отдельно?

Учимся делать нестандартные шаги

169. Трёхзначное число n таково, что числа $n-6$, $n-7$ и $n-8$ кратны числам 7, 8 и 9 соответственно. Найдите число n.

§ 6. Системы линейных неравенств с одной переменной

Рассмотрим выражение $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$. Найдём множество допустимых значений переменной x, т. е. все значения переменной x, при которых данное выражение имеет смысл. Это множество называют **областью определения выражения**.

Так как подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения, то должны *одновременно* выполняться два неравенства: $2x-1 \geq 0$ и $5-x \geq 0$. То есть искомые значения переменной x – это все общие решения указанных неравенств.

Если требуется найти все общие решения двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо **решить систему неравенств**.

Как и систему уравнений, систему неравенств записывают с помощью фигурной скобки. Так, для нахождения области определения выражения $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 5-x \geq 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Определение

Решением системы неравенств с одной переменной называют значение переменной, которое обращает каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

Например, числа 2, 3, 4, 5 являются решениями системы (*), а число 7 не является её решением.

Определение

Решить систему неравенств означает найти все её решения или доказать, что решений нет.

Все решения системы неравенств образуют **множество решений системы неравенств**. Если система решений не имеет, то говорят, что множеством её решений является пустое множество.

Таким образом, можно сказать, что ***решить систему неравенств означает найти множество её решений***.

Например, в задаче «решите систему неравенств $\begin{cases} 0x \geq -1, \\ |x| \geq 0 \end{cases}$ » ответ будет таким: «множество действительных чисел».

Очевидно, что множество решений системы $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 5 \end{cases}$ состоит из единственного числа 5.

Система $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ решений не имеет, т. е. множеством её решений является пустое множество.

Решим систему (*). Преобразовав каждое неравенство системы в равносильное ему, получим: $\begin{cases} 2x \geq 1, \\ -x \geq -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \leq 5. \end{cases}$

Множество решений последней системы состоит из всех чисел, которые не меньше $\frac{1}{2}$ и не больше 5, т. е. из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают так: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (читают: «промежуток от $\frac{1}{2}$ до 5, включая $\frac{1}{2}$ и 5»).

Ответ к задаче о нахождении области определения выражения $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$ может быть записан в такой форме: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

Точки, изображающие решения системы (*), расположены между точками $A\left(\frac{1}{2}\right)$ и $B(5)$, включая точки A и B (рис. 9). Они образуют отрезок.

Заметим, что все общие точки промежутков $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$ образуют промежуток $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (рис. 10). Тогда

Рис. 9

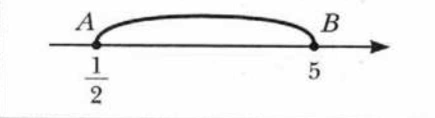
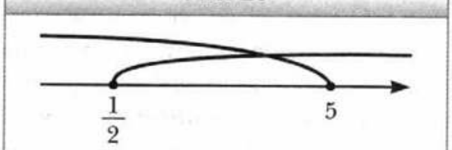


Рис. 10



промежуток $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ является пересечением промежутков $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$, т. е. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; 5] = \left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

Промежутки $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$ являются множествами решений соответственно неравенств $x \geq \frac{1}{2}$ и $x \leq 5$. Тогда можно сказать, что *множество решений системы* $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \leq 5 \end{cases}$ *является пересечением множеств решений каждого из неравенств, составляющих систему.*

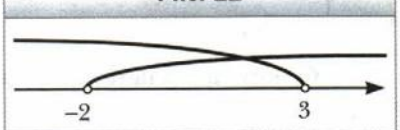
Следовательно, ***чтобы решить систему неравенств, надо найти пересечение множеств решений неравенств, составляющих систему***.

Пример 1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9. \end{cases}$

Решение. Имеем: $\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$

С помощью координатной прямой найдём пересечение множеств решений неравенств данной системы, т. е. пересечение промежутков $(-\infty; 3)$ и $(-2; +\infty)$ (рис. 11). Искомое пересечение состоит из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $-2 < x < 3$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают так: $(-2; 3)$ (читают: «промежуток от -2 до 3»).

Рис. 11



Ответ: $(-2; 3)$. ◄

Пример 2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leq 5. \end{cases}$

Решение. Имеем: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leq 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x \geq -2. \end{cases}$

С помощью координатной прямой найдём пересечение промежутков $(-\infty; 1)$ и $[-2; +\infty)$, являющихся множествами решений неравенств данной системы (рис. 12). Искомое пересечение состоит из всех чи-

Рис. 12

сел, удовлетворяющих неравенству $-2 \le x < 1$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают так: $[-2; 1)$ (читают: «промежуток от -2 до 1, включая -2»).

Ответ: $[-2; 1)$. ◄

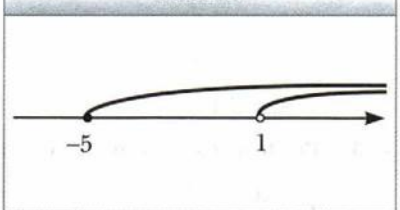
<u>**Пример 3.**</u> Решите систему неравенств $\begin{cases} x \le 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Решение. Множеством решений данной системы является пересечение промежутков $(-\infty; 1]$ и $(-2; +\infty)$. Это пересечение – числовой промежуток, который обозначают так: $(-2; 1]$ (читают: «промежуток от -2 до 1, включая 1»).

Ответ: $(-2; 1]$. ◄

<u>**Пример 4.**</u> Найдите область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5}$.

Рис. 13

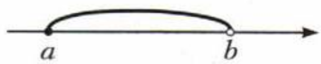


Решение. Искомая область определения – это множество решений системы $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + 5 \ge 0. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x > 1, \\ x \ge -5. \end{cases}$

Изобразим на координатной прямой пересечение промежутков $(1; +\infty)$ и $[-5; +\infty)$ (рис. 13). Этим пересечением является промежуток $(1; +\infty)$.

Ответ: $(1; +\infty)$. ◄

Приведём таблицу обозначений и изображений числовых промежутков, изученных в этом параграфе.

Неравенство	Промежуток	Изображение
$a \le x \le b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \le b$	$(a; b]$	
$a \le x < b$	$[a; b)$	

1. Что называют областью определения выражения?
2. В каких случаях говорят, что надо решить систему неравенств?
3. С помощью какого символа записывают систему неравенств?
4. Что называют решением системы неравенств с одной переменной?
5. Что означает решить систему неравенств?
6. Пересечение каких множеств надо найти, чтобы решить систему неравенств?
7. Как записывают, читают и изображают промежуток, являющийся множеством решений неравенства вида: $a \le x \le b$? $a < x < b$? $a < x \le b$? $a \le x < b$?

Упражнения

170. Какие из чисел –6; –5; 0; 2; 4 являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ -2x \le 10? \end{cases}$$

171. Решением какой из систем неравенств является число –3:

1) $\begin{cases} x \ge -3, \\ x \ge 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 1 > -1, \\ x - 2 < 0? \end{cases}$

172. Изобразите на координатной прямой промежуток:
1) $(-3; 4)$; 3) $[-3; 4)$;
2) $[-3; 4]$; 4) $(-3; 4]$.

173. Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, который задаётся неравенством:
1) $0 < x < 5$; 3) $0{,}2 \le x < 102$;
2) $\frac{1}{6} < x \le 2\frac{1}{7}$; 4) $-2{,}4 \le x \le -1$.

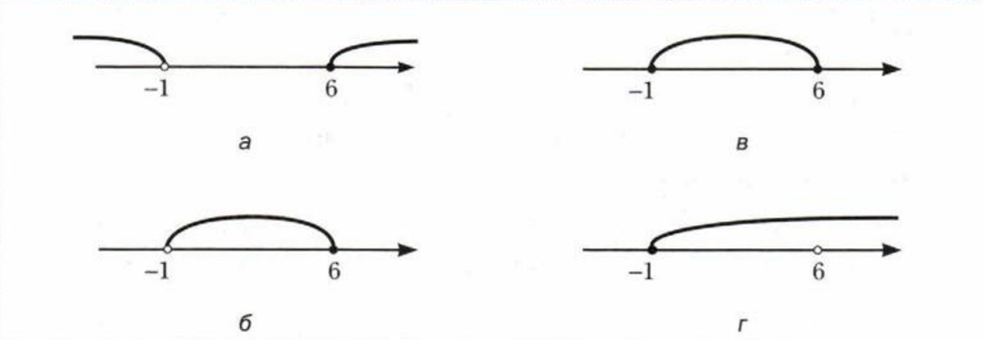
174. Запишите все целые числа, принадлежащие промежутку:
1) $[3; 7]$; 2) $(2{,}9; 6]$; 3) $[-5{,}2; 1)$; 4) $(-2; 2)$.

175. Укажите наименьшее и наибольшее целые числа, принадлежащие промежутку:
1) $[-12; -6]$; 3) $(-10{,}8; 1{,}6]$;
2) $(5; 11]$; 4) $[-7{,}8; -2{,}9]$.

176. Изобразите на координатной прямой и запишите пересечение промежутков:
1) $[-1; 7]$ и $[4; 9]$; 4) $(-\infty; 2{,}6)$ и $(2{,}8; +\infty)$;
2) $[3; 6]$ и $(3; 8)$; 5) $[9; +\infty)$ и $[11{,}5; +\infty)$;
3) $(-\infty; 3{,}4)$ и $(2{,}5; +\infty)$; 6) $(-\infty; -4{,}2]$ и $(-\infty; -1{,}3)$.

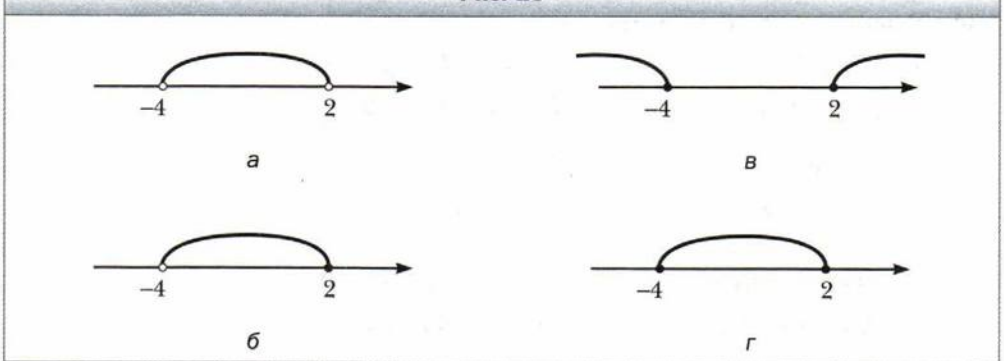
177. Укажите на рисунке 14 изображение множества решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x \le 6. \end{cases}$

Рис. 14



178. Укажите на рисунке 15 изображение множества решений двойного неравенства $-4 \le x \le 2$.

Рис. 15



179. Какой из данных промежутков является множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2: \end{cases}$

1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$?

180. Известно, что $a < b < c < d$. Какой из данных промежутков является пересечением промежутков $(a; c)$ и $(b; d)$:

1) $(a; d)$; 2) $(b; c)$; 3) $(c; d)$; 4) $(a; b)$?

181. Известно, что $m < n < k < p$. Какой из данных промежутков является пересечением промежутков $(m; p)$ и $(n; k)$:
1) $(m; n)$; 2) $(k; p)$; 3) $(n; k)$; 4) $(m; p)$?

182. Изобразите на координатной прямой и запишите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} x \le 2, \\ x \le -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \ge -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \ge -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \ge 2, \\ x \le 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \le 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \le 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \le -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \ge 2, \\ x < 2. \end{cases}$

183. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \ge -6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x + 3 \ge 0, \\ 7 - 4x < 7; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x - 6 \le x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 10x - 1 \ge 3, \\ 7 - 3x \ge 2x - 3; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x + 14 \ge 18 - x, \\ 1{,}5x + 1 < 3x - 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 6 > 2, \\ \dfrac{x}{4} < 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \le x + 9; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x + 19 \le 5x - 1, \\ 10x < 3x + 21. \end{cases}$

184. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -4x \le -12, \\ x + 2 > 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2 - 3x < 4x - 12, \\ 7 + 3x \ge 2x + 10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 - x \ge 5, \\ x - 7 \le 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 3 \ge 8, \\ \dfrac{x + 1}{3} < 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 3 < 5x, \\ 7x - 10 < 5x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 2 \ge 2x + 1, \\ 2x + 3 \le 33 - 3x. \end{cases}$

185. Найдите множество решений неравенства:
1) $-3 < x - 4 < 7$; 3) $0{,}8 \le 6 - 2x < 1{,}4$;
2) $-2{,}4 \le 3x + 0{,}6 \le 3$; 4) $4 < \dfrac{x}{5} - 2 \le 5$.

186. Решите неравенство:
1) $2 < x + 10 \le 14$; 3) $-1{,}8 \le 1 - 7x \le 36$;
2) $10 < 4x - 2 < 18$; 4) $1 \le \dfrac{x + 1}{4} < 1{,}5$.

187. Сколько целых решений имеет система неравенств $\begin{cases} -2x \ge -15, \\ 3x > -10? \end{cases}$

188. Найдите сумму целых решений системы неравенств $\begin{cases} x + 8 \geq 4, \\ 5x + 1 \leq 9. \end{cases}$

189. Сколько целых решений имеет неравенство $-3 \leq 7x - 5 < 16$?

190. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} x + 8 \geq 17, \\ \dfrac{x}{2} > 4{,}5. \end{cases}$

191. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} 2x + 1 < -4, \\ 3x - 6 \leq -12. \end{cases}$

192. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 8(2 - x) - 2x > 3, \\ -3(6x - 1) - x < 2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{4} - \dfrac{2x + 3}{3} > 1, \\ 6(2x - 1) < 5(x - 4) - 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x - 3) \leq 3x + 4(x + 1), \\ (x - 3)(x + 3) \leq (x - 4)^2 - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x + 11) \geq 3(6 - x), \\ (x - 3)(x + 6) \geq (x + 5)(x - 4); \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x + 1}{2} \leq \dfrac{x + 1}{3}, \\ (x + 5)(x - 3) + 41 \geq (x - 6)^2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x + 4 \leq 2x - 8, \\ (x + 2)(x - 1) \geq (x + 3)(x - 2); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x + 2}{7} < \dfrac{x + 1}{4}, \\ (x - 6)(x + 2) + 4x < (x - 7)(x + 7); \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{6x + 1}{6} - \dfrac{5x - 1}{5} > -1, \\ 2(x + 8) - 3(x + 2) < 5 - x. \end{cases}$

193. Найдите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} \frac{2x-3}{5} - \frac{4x-9}{6} > 1, \\ 5(x-1) + 7(x+2) > 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < \frac{x+12}{6}, \\ 0,3x - 19 \le 1,7x - 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-6)^2 < (x-2)^2 - 8, \\ 3(2x-1) - 8 < 34 - 3(5x-9); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{3x-2}{3} - \frac{4x+1}{4} \le 1, \\ (x-1)(x-2) > (x+4)(x-7). \end{cases}$

194. Найдите целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2x - 1 < 1,7 - x, \\ 3x - 2 \ge x - 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 1, \\ 2x - \frac{x}{2} \ge 10. \end{cases}$

195. Сколько целых решений имеет система неравенств:

1) $\begin{cases} 4x + 3 \ge 6x - 7, \\ 3(x+8) \ge 4(8-x); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - \frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{6} < 2, \\ \frac{2x-5}{3} \ge -3? \end{cases}$

196. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{6x-9} + \sqrt{2x-5}$;

2) $\sqrt{3x+5} - \frac{1}{\sqrt{15-5x}}$;

3) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{1-x}$;

4) $\sqrt{12-3x} - \frac{5}{x-4}$.

197. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{8-x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{7x-35} + \frac{1}{x^2-5x}$?

198. Решите неравенство:

1) $-3 < \frac{2x-5}{2} < 4$;

2) $-4 \le 1 - \frac{x-2}{3} \le -3$.

199. Решите неравенство:

1) $-2 \le \frac{6x+1}{4} < 4$;

2) $1,2 < \frac{7-3x}{5} \le 1,4$.

200. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 2, \\ x < 3,6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 6 < 8, \\ 4 - 4x < 10, \\ 8x - 9 > 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0,4 - 8x \ge 3,6, \\ 1,5x - 2 < 4, \\ 4,1x + 10 < 1,6x + 5. \end{cases}$

201. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -x < 2, \\ 2x > 7, \\ x < -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x + 2, \\ 2x + 1 > 8 - 5x, \\ 5x - 25 \le 0. \end{cases}$

202. Одна сторона треугольника равна 4 см, а сумма двух других — 8 см. Найдите неизвестные стороны треугольника, если длина каждой из них равна целому числу сантиметров.

203. Решите неравенство:

1) $(x-3)(x+4) \le 0$;
2) $(x+1)(2x-7) > 0$;
3) $\dfrac{x-8}{x-1} > 0$;
4) $\dfrac{3x+6}{x-9} < 0$;
5) $\dfrac{2x-1}{x+2} \le 0$;
6) $\dfrac{5x+4}{x-6} \ge 0$.

204. Решите неравенство:

1) $(14-7x)(x+3) > 0$;
2) $\dfrac{x-8}{3x-12} > 0$;
3) $\dfrac{5x-6}{x+9} \ge 0$;
4) $\dfrac{4x+1}{x-10} \le 0$.

205. Решите неравенство:

1) $|x-2| \le 3{,}6$;
2) $|2x+3| < 5$;
3) $|x+3| > 9$;
4) $|7-3x| \ge 1$;
5) $|x+3| + 2x \ge 6$;
6) $|x-4| - 6x < 15$.

206. Решите неравенство:

1) $|x-6| \ge 2{,}4$;
2) $|5x+8| \le 2$;
3) $|x+5| - 3x > 4$;
4) $|x-1| + x \le 3$.

207. При каких значениях a имеет хотя бы одно решение система неравенств:

1) $\begin{cases} x \ge 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \le 3, \\ x \ge a? \end{cases}$

208. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \le 1, \\ x \ge a? \end{cases}$

209. При каких значениях a множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x \ge a \end{cases}$ является промежуток:

1) $(-1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$?

210. Для каждого значения a решите систему неравенств $\begin{cases} x < 2, \\ x \le a. \end{cases}$

211. Для каждого значения a решите систему неравенств $\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$

212. При каких значениях a множество решений системы неравенств $\begin{cases} x \ge 7, \\ x < a \end{cases}$ содержит ровно четыре целых числа?

213. При каких значениях b множество решений системы неравенств $\begin{cases} x < 5, \\ x \geq b \end{cases}$ содержит ровно три целых числа?

214. При каких значениях a наименьшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \geq 6, \\ x > a \end{cases}$ является число 9?

215. При каких значениях b наибольшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \leq b, \\ x < -2 \end{cases}$ является число -6?

216. При каких значениях a корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ меньше числа 5?

217. При каких значениях a корни уравнения $x^2 - (4a - 2)x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$ принадлежат промежутку $[-2; 8]$?

218. При каких значениях a один из корней уравнения $3x^2 - (2a + 5)x + 2 + a - a^2 = 0$ меньше -2, а другой — больше 3?

Упражнения для повторения

219. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2}{x^2 - 16} = \frac{3x + 4}{x^2 - 16}$; 2) $\frac{5}{x - 3} - \frac{8}{x} = 3$.

220. Упростите выражение:

1) $0{,}5\sqrt{24} - 4\sqrt{40} - \sqrt{150} + \sqrt{54} + \sqrt{1000}$;

2) $\sqrt{8b} + 0{,}3\sqrt{50b} - 3\sqrt{2b}$;

3) $1{,}5\sqrt{72} - \sqrt{216} - 0{,}6\sqrt{450} + 0{,}5\sqrt{96}$.

221. Выразите из данного равенства переменную x через другие переменные:

1) $2x - \frac{m}{n} = 2$; 2) $\frac{1}{m} - \frac{1}{x} = \frac{1}{n}$.

222. Известно, что a — чётное число, b — нечётное, $a > b$. Значение какого из данных выражений может быть целым числом:

1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; 2) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{b}{a}$?

223. Сколько килограммов соли содержится в 40 кг 9-процентного раствора?

224. Руда содержит 8 % олова. Сколько надо взять килограммов руды, чтобы получить 72 кг олова?

225. Каково процентное содержание соли в растворе, если в 350 г раствора содержится 21 г соли?

Задание № 1 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Сравните числа a и b, если $a - b = -3{,}6$.

А) $a > b$ В) $a = b$

Б) $a < b$ Г) сравнить невозможно

2. Известно, что $m > n$. Какое из данных утверждений ошибочно?

А) $m - 2 > n - 2$ В) $m + 2 > n + 2$

Б) $2m > 2n$ Г) $-2m > -2n$

3. Оцените периметр P равностороннего треугольника со стороной a см, если $0{,}8 < a < 1{,}2$.

А) 1,6 см $< P <$ 2,4 см В) 3,2 см $< P <$ 4,8 см

Б) 2,4 см $< P <$ 3,6 см Г) 1,2 см $< P <$ 1,8 см

4. Известно, что $2 < x < 3$ и $1 < y < 4$. Оцените значение выражения xy.

А) $4 < xy < 8$ В) $2 < xy < 12$

Б) $3 < xy < 7$ Г) $6 < xy < 14$

5. Известно, что $-18 < y < 12$. Оцените значение выражения $\frac{1}{6}y + 2$.

А) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$ В) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$

Б) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$ Г) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$

6. Дано: $a > 0$, $b < 0$. Какое из данных неравенств может быть правильным?

А) $a^2 < b^2$ Б) $\frac{a}{b} > 1$ В) $a - b < 0$ Г) $a^2b^3 > 0$

7. Множеством решений какого неравенства является множество действительных чисел?

А) $2x > -2$ Б) $2x > 0$ В) $0x > -2$ Г) $0x > 0$

8. Множеством решений какого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$?

А) $x \geq 3$ Б) $x \leq 3$ В) $x > 3$ Г) $x < 3$

9. Найдите решения неравенства $\frac{x}{4} \leq \frac{1}{5}$.

А) $x \geq \frac{4}{5}$ Б) $x \geq \frac{1}{20}$ В) $x \leq \frac{4}{5}$ Г) $x \leq \frac{1}{20}$

10. Решите неравенство $-3x + 8 \geq 5$.

А) $x \leq 1$ Б) $x \geq 1$ В) $x \leq -1$ Г) $x \geq -1$

11. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{3x-5}{2} > \frac{8-x}{3}$.

А) 2 В) 4

Б) 3 Г) определить невозможно

12. Чему равно произведение натуральных чисел, принадлежащих области определения выражения $\sqrt{14-3x}$?

А) 4 Б) 10 В) 18 Г) 24

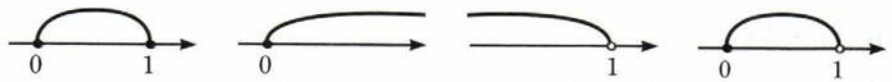
13. Какая из данных систем неравенств не имеет решений?

А) $\begin{cases} x \geq -3, \\ x \leq -2 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -2 \end{cases}$ В) $\begin{cases} x \geq -3, \\ x \leq -3 \end{cases}$ Г) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq -3 \end{cases}$

14. Найдите множество решений системы неравенств $\begin{cases} x-1 > 2x-3, \\ 4x+5 > x+17. \end{cases}$

А) $\varnothing$ Б) $(2; +\infty)$ В) $(-\infty; 4)$ Г) $(2; 4)$

15. Какой из изображённых числовых промежутков соответствует множеству решений системы неравенств $\begin{cases} 8-7x > 3x-2, \\ -2(3x-2{,}6) \leq -2 \cdot (-2{,}6)? \end{cases}$



А Б В Г

16. Сколько целых решений имеет система неравенств

$\begin{cases} x - \frac{x-2}{3} \geq \frac{x-3}{4} - \frac{x-1}{2}, \\ 1 - 0{,}5x > x - 4? \end{cases}$

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6

17. Решите неравенство $-3 < \frac{1-2x}{5} - 2 < 1$.

А) $(-3; 7)$ Б) $(-7; 3)$ В) $(-7; -3)$ Г) $(3; 7)$

18. При каких значениях a уравнение $2x^2 + 6x + a = 0$ не имеет корней?

А) $a < 4{,}5$ Б) $a > 4{,}5$ В) $a > -4{,}5$ Г) $a < -4{,}5$

Итоги главы 1

Сравнение чисел

Число a считают больше числа b, если разность $a - b$ является положительным числом. Число a считают меньше числа b, если разность $a - b$ является отрицательным числом.

Основные свойства числовых неравенств

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
Если $a > b$ и c — любое число, то $a + c > b + c$.
Если $a > b$ и c — положительное число, то $ac > bc$.
Если $a > b$ и c — отрицательное число, то $ac < bc$.
Если $a > b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Сложение и умножение числовых неравенств

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
Если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

Решение неравенства с одной переменной

Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.
Решить неравенство означает найти все его решения или доказать, что решений не существует.

Равносильные неравенства

Неравенства называют равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.

Правила решения неравенств с одной переменной

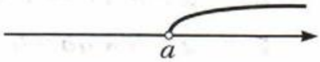
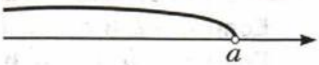
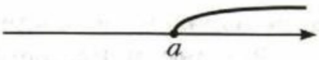
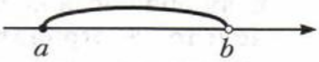
- **Если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.**
- **Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.**
- **Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.**

Решение системы неравенств с одной переменной

Решением системы неравенств с одной переменной называют значение переменной, которое обращает каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

Решить систему неравенств означает найти все её решения или доказать, что решений нет.

Числовые промежутки

Неравенство	Промежуток	Изображение
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	
$x \leq a$	$(-\infty; a]$	
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leq b$	$(a; b]$	
$a \leq x < b$	$[a; b)$	

Глава 2. Квадратичная функция

В этой главе вы повторите и расширите свои знания о функции и её свойствах.

Научитесь, используя график функции $y = f(x)$, строить графики функций $y = kf(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$.

Узнаете, какую функцию называют квадратичной, какая фигура является её графиком, изучите свойства квадратичной функции.

Научитесь применять свойства квадратичной функции.

Расширите свои знания о системах уравнений с двумя переменными, методах их решения, приобретёте новые навыки решения систем уравнений.

§ 7. Повторение и расширение сведений о функции

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить содержание п. 28–34 на с. 271–273.

В повседневной жизни нам часто приходится наблюдать процессы, в которых изменение одной величины (независимой переменной) влечёт за собой изменение другой величины (зависимой переменной). Изучение этих процессов требует создания их математических моделей. Одной из таких важнейших моделей является **функция**.

С этим понятием вы познакомились в 7 классе. Напомним и уточним основные сведения.

Пусть X – множество значений независимой переменной, Y – множество значений зависимой переменной. **Функция – это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной из множества Y.**

Обычно независимую переменную обозначают буквой x, зависимую – буквой y, функцию (правило) – буквой f. Говорят, что переменная y **функционально зависит** от переменной x. Этот факт обозначают так: $y = f(x)$.

Независимую переменную ещё называют **аргументом функции**.

Множество всех значений, которые принимает аргумент, называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Так, областью определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ является промежуток $(0; +\infty)$, т. е. $D(y) = (0; +\infty)$.

В функциональной зависимости каждому значению аргумента x соответствует определённое значение зависимой переменной y. Значение зависимой переменной ещё называют **значением функции** и обозначают $f(x)$. Множество всех значений, которые принимает зависимая переменная, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ или $E(y)$. Так, областью значений функции $y = \sqrt{x}$ является промежуток $[0; +\infty)$, т. е. $E(y) = [0; +\infty)$.

Функцию считают заданной, если указана её область определения и правило, с помощью которого можно по каждому значению независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Функцию можно задать одним из следующих способов:

- описательно;
- с помощью формулы;
- с помощью таблицы;
- графически.

Чаще всего функцию задают с помощью формулы. Такой способ задания функции называют **аналитическим**. Если при этом не указана область определения, то считают, что областью определения функции является область определения выражения, входящего в формулу. Например, если функция задана формулой $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, то её областью определения является область определения выражения $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, т. е. промежуток $(1; +\infty)$.

В таблице приведены функции, которые вы изучали в 7 и 8 классах.

Функция	Область определения	Область значений	График
$y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	Если $k \neq 0$, то $(-\infty; +\infty)$; если $k = 0$, то область значений состоит из одного числа b	Прямая
$y = \dfrac{k}{x}$, $k \neq 0$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	Гипербола
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Парабола
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	—

1. Что такое функция?
2. Как обозначают тот факт, что переменная y функционально зависит от переменной x?

3. Что называют аргументом функции?
4. Что называют областью определения функции?
5. Что называют значением функции?
6. Что называют областью значений функции?
7. В каком случае функцию считают заданной?
8. Какие способы задания функции вы знаете?
9. Что считают областью определения функции, если она задана формулой и при этом не указана область определения?

Упражнения

226. Функция задана формулой $f(x) = -2x^2 + 5x$.

1) Найдите: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-5)$.

2) Найдите значения аргумента, при которых значение функции равно: 0; 2; −3.

3) Верно ли равенство: а) $f(-1) = 7$; б) $f(4) = -12$?

227. Функция задана формулой $f(x) = 3x - 2$.

1) Найдите: $f(3)$; $f(0)$; $f(-0{,}2)$; $f(1{,}6)$.

2) Найдите значение x, при котором: $f(x) = 10$; $f(x) = -6$; $f(x) = 0$.

228. Каждому натуральному числу, которое больше 10, но меньше 20, поставили в соответствие остаток от деления этого числа на 5.

1) Каким способом задана эта функция?

2) Какова область значений этой функции?

3) Задайте эту функцию таблично.

229. Функция задана формулой $y = 0{,}4x - 2$. Заполните таблицу соответствующих значений x и y:

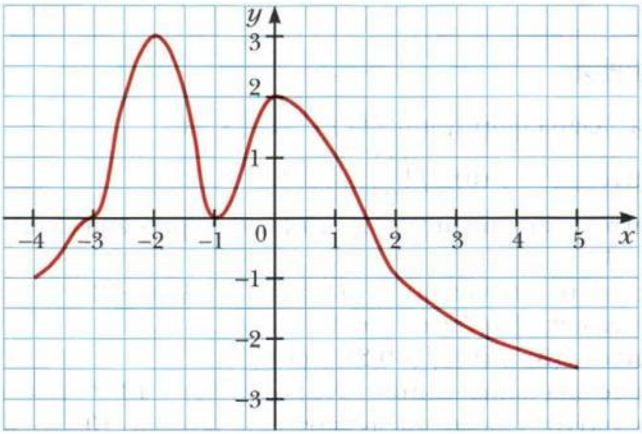
x	2		−2,5	
y		−2		0,8

230. Дана функция $y = -\frac{16}{x}$. Заполните таблицу соответствующих значений x и y:

x	2		−0,4	
y		0,8		−32

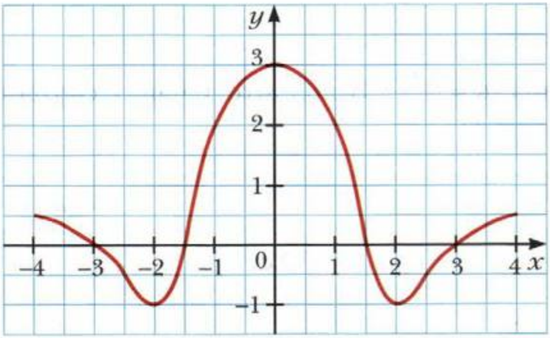
231. На рисунке 16 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-4; 5]$. Пользуясь графиком, найдите:
1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) значения x, при которых: $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значений функции.

Рис. 16



232. На рисунке 17 изображён график функции $y = g(x)$, определённой на промежутке $[-4; 4]$. Пользуясь графиком, найдите:
1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2{,}5)$;
2) значения x, при которых: $f(x) = -1$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значений функции.

Рис. 17



233. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = 7x - 15$;
2) $f(x) = \dfrac{8}{x+5}$;
3) $f(x) = \dfrac{x-10}{6}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-9}$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;
6) $f(x) = \dfrac{10}{x^2-4}$;
7) $f(x) = \dfrac{6x+11}{x^2-2x}$;
8) $f(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{4-x}$.

234. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$;
2) $f(x) = \dfrac{9}{x^2+16}$;
3) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-6x+8}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$;
6) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

235. Постройте график функции:

1) $f(x) = -2x + 3$;
2) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x$;
3) $f(x) = 3$;
4) $f(x) = -\dfrac{6}{x}$.

236. Постройте график функции:

1) $f(x) = 4 - \dfrac{1}{3}x$;
2) $f(x) = \dfrac{8}{x}$.

237. Найдите, не выполняя построения, точки пересечения с осями координат графика функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{6}x - 7$;
2) $f(x) = \dfrac{20+4x}{3x-5}$;
3) $g(x) = 9 - x^2$;
4) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$.

238. Найдите, не выполняя построения, точки пересечения с осями координат графика функции:

1) $h(x) = 9 - 10x$;
2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$;
3) $s(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+2}$.

239. Дана функция $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{если } x \le -1, \\ x^2 - 5, \text{если } -1 < x < 4, \\ 11, \text{если } x \ge 4. \end{cases}$

Найдите: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6{,}4)$.

240. Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}6, \text{если } x \le -3,\\ x^2, \text{если } -3 < x < 1,\\ x, \text{если } x \ge 1.\end{cases}$

241. Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x}, \text{если } x < -2,\\ -x, \text{если } -2 \le x \le 0,\\ \sqrt{x}, \text{если } x > 0.\end{cases}$

242. Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{x+2}{x-5}$;

2) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-7}$;

3) $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$;

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{4x-3}{x^2-7x+6}$.

243. Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{2}{x+1}$;

2) $f(x)=\sqrt{8-x}+\dfrac{4}{x^2-8x}$.

244. Найдите область значений функции:

1) $f(x)=\sqrt{x}-1$;

2) $f(x)=5-x^2$;

3) $f(x)=-7$;

4) $f(x)=|x|+2$;

5) $f(x)=\sqrt{-x^2}$;

6) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$.

245. Найдите область значений функции:

1) $f(x)=x^2+3$;

2) $f(x)=6-\sqrt{x}$;

3) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$.

246. Задайте формулой какую-нибудь функцию, областью определения которой является:

1) множество действительных чисел, кроме чисел 1 и 2;

2) множество действительных чисел, которые не меньше 5;

3) множество действительных чисел, которые не больше 10, кроме числа −1;

4) множество, состоящее из одного числа −4.

247. Найдите область определения функции и постройте её график:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$;

2) $f(x)=\dfrac{12x-72}{x^2-6x}$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-9}$.

248. Найдите область определения функции и постройте её график:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$;

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x}$.

Упражнения для повторения

249. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

1) $x^2 - x - 12$; 3) $6x^2 + 11x - 2$;

2) $-x^2 + 2x + 35$; 4) $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 6$.

250. Вычислите значение выражения:

1) $(10^3)^2 \cdot 10^{-8}$; 3) $\frac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-2}}$;

2) $\frac{25^{-3} \cdot 5^3}{5^{-5}}$; 4) $\frac{0{,}125^3 \cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$.

251. Цена двух шкафов была одинаковой. Цену первого шкафа сначала повысили на 20 %, а потом снизили на 10 %. Цену второго шкафа, наоборот, сначала снизили на 10 %, а потом повысили на 20 %. Цена какого шкафа стала больше?

252. Расстояние между городами A и B составляет 120 км. Через 2 ч после выезда из города A мотоциклист задержался у железнодорожного переезда на 6 мин. Чтобы прибыть в город B в запланированное время, он увеличил скорость на 12 км/ч. С какой скоростью двигался мотоциклист после задержки?

Учимся делать нестандартные шаги

253. Натуральное число n имеет ровно 100 различных натуральных делителей (включая 1 и n). Найдите их произведение.

Когда сделаны уроки

Из истории развития понятия функции

Определение функции, которым вы пользуетесь на данном этапе изучения математики, появилось сравнительно недавно – в первой половине XIX в. Оно формировалось более 200 лет под влиянием бурных споров выдающихся математиков нескольких поколений.

Исследованием функциональных зависимостей между величинами начали заниматься ещё учёные древности. Этот поиск нашёл отражение в открытии формул для вычисления площадей и объёмов некоторых фигур. Примерами табличного задания функций могут служить астрономические таблицы вавилонян, древних греков и арабов.

Пьер Ферма

Рене Декарт

Исаак Ньютон

Однако лишь в первой половине XVII в. своим открытием метода координат выдающиеся французские математики Пьер Ферма (1601–1665) и Рене Декарт (1596–1650) заложили основы для возникновения понятия функции. В своих работах они исследовали изменение ординаты точки в зависимости от изменения её абсциссы.

Важную роль в формировании понятия функции сыграли работы великого английского учёного Исаака Ньютона (1643–1727). Под функцией он понимал величину, которая изменяет своё значение с течением времени.

Термин «функция» (от лат. *functio* – «совершение», «выполнение») ввёл немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646–1716). Он и его ученик, швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667–1748), под функцией понимали формулу, связывающую одну переменную с другой, т. е. отождествляли функцию с одним из способов её задания.

Дальнейшему развитию понятия функции во многом способствовало выяснение истины в многолетнем споре выдающихся математиков Леонар-

Готфрид Лейбниц

Иоганн Бернулли

Леонард Эйлер

Жан Лерон Д'Аламбер

Николай Лобачевский

Петер Дирихле

да Эйлера (1707–1783) и Жана Лерона Д'Аламбера (1717–1783), одним из предметов которого было выяснение сути этого понятия. В результате был сформирован более общий взгляд на функцию как зависимость одной переменной величины от другой, в котором это понятие жёстко не связывалось со способом задания функции.

В 30-х гг. XIX в. идеи Эйлера получили дальнейшее развитие в работах выдающихся учёных: русского математика Николая Ивановича Лобачевского (1792–1856) и немецкого математика Петера Густава Лежёна Дирихле (1805–1859). Именно тогда появилось такое определение: переменную величину y называют функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное значение величины y.

Такое определение функции можно и сегодня встретить в школьных учебниках. Однако более современный подход – это трактовка функции как *правила, с помощью которого по значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной*.

Когда на рубеже XIX и XX вв. возникла теория множеств и стало ясно, что элементами области определения и области значений совсем не обязательно должны быть числа, то под функцией стали понимать *правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие единственный элемент множества Y*.

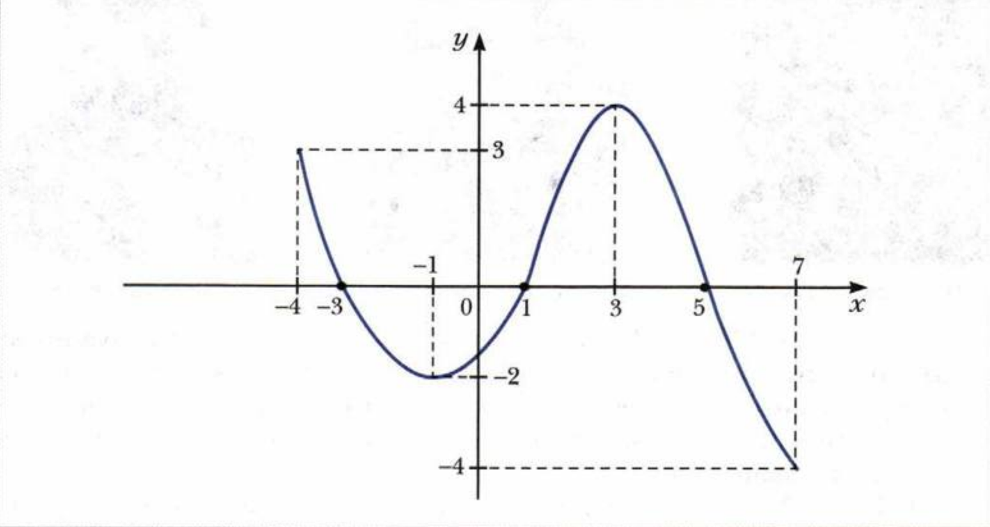
§ 8. Свойства функции

Часто о свойствах объекта можно судить по его изображению: фотографии, рентгеновскому снимку, рисунку и т. п.

«Изображением» функции может служить её график. Покажем, как график функции позволяет определить некоторые её свойства.

На рисунке 18 изображён график некоторой функции f.

Рис. 18



Её областью определения является промежуток $[-4; 7]$, а областью значений – промежуток $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значение функции равно нулю.

Определение

Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют нулём функции.

Так, числа −3, 1, 5 являются нулями данной функции.

Заметим, что на промежутках $[-4; -3)$ и $(1; 5)$ график функции f расположен над осью абсцисс, а на промежутках $(-3; 1)$ и $(5; 7]$ – под осью абсцисс. Это означает, что на промежутках $[-4; -3)$ и $(1; 5)$ функция принимает положительные значения, а на промежутках $(-3; 1)$ и $(5; 7]$ – отрицательные.

Каждый из указанных промежутков называют **промежутком знакопостоянства** функции f.

Определение

Промежуток, на котором функция принимает значения одного знака, называют промежутком знакопостоянства функции.

Отметим, что, например, промежуток (0; 5) не является промежутком знакопостоянства данной функции.

Замечание. При поиске промежутков знакопостоянства функции принято указывать максимальные промежутки, на которых функция обладает указанным свойством. Например, промежуток (–2; –1) является промежутком знакопостоянства функции f (см. рис. 18), но в ответ следует включить промежуток (–3; 1), содержащий промежуток (–2; –1).

Если перемещаться по оси абсцисс от –4 до –1, то можно заметить, что график функции идёт вниз, т. е. значения функции уменьшаются. Говорят, что на промежутке [–4; –1] **функция убывает**. С увеличением x от –1 до 3 график функции идёт вверх, т. е. значения функции увеличиваются. Говорят, что на промежутке [–1; 3] **функция возрастает**.

Определение

Функцию f называют возрастающей на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение

Функцию f называют убывающей на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Часто используют и такие формулировки.

Определение

Функцию называют возрастающей на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение

Функцию называют убывающей на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Если функция возрастает на всей области определения, то её называют **возрастающей**. Если функция убывает на всей области определения, то её называют **убывающей**.

Например, на рисунке 19 изображён график функции $y = \sqrt{x}$. Эта функция является возрастающей. На рисунке 20 изображён график убывающей функции $y = -x$. На рисунке 18 изображён график функции, не являющейся ни возрастающей, ни убывающей.

Рис. 19

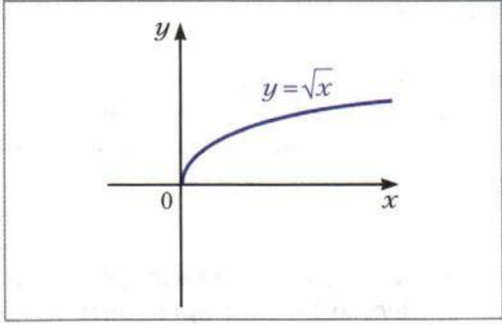
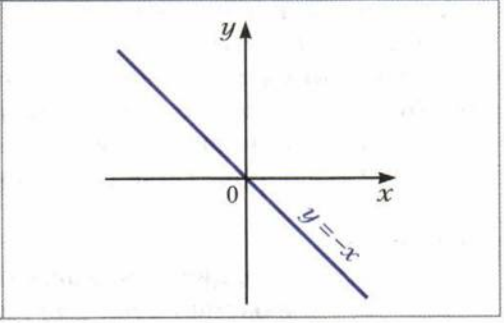


Рис. 20



Пример 1. Докажите, что функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – произвольные значения аргумента из промежутка $(-\infty; 0]$, причём $x_2 > x_1$. Покажем, что $x_2^2 < x_1^2$, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Имеем: $x_2 > x_1$; отсюда $-x_2 < -x_1$. Обе части последнего неравенства являются неотрицательными числами. Тогда по свойству числовых неравенств можно записать, что $(-x_2)^2 < (-x_1)^2$, т. е. $x_2^2 < x_1^2$. ◄

Заметим, что в подобных случаях говорят: промежуток $(-\infty; 0]$ является **промежутком убывания** функции $y = x^2$. Аналогично можно доказать, что промежуток $[0; +\infty)$ является **промежутком возрастания** функции $y = x^2$.

В задачах на поиск промежутков возрастания и убывания функции принято указывать максимальные промежутки, на которых функция обладает указанным свойством.

Пример 2. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – произвольные значения аргумента из промежутка $(0; +\infty)$, причём $x_2 > x_1$. Тогда по свойству числовых неравенств $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$. Следовательно, данная функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$.

Аналогично доказывают, что функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. ◄

Заметим: нельзя утверждать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает на всей области определения, т. е. является убывающей. Действительно, если, например, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то из неравенства $x_2 > x_1$ не следует, что $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$.

Пример 3. Докажите, что линейная функция $f(x) = kx + b$ является возрастающей при $k > 0$ и убывающей при $k < 0$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – произвольные значения аргумента, причём $x_2 > x_1$.

Имеем:

$f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$.

Так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$.

Тогда если $k > 0$, то $k(x_2 - x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, при $k > 0$ данная функция является возрастающей.

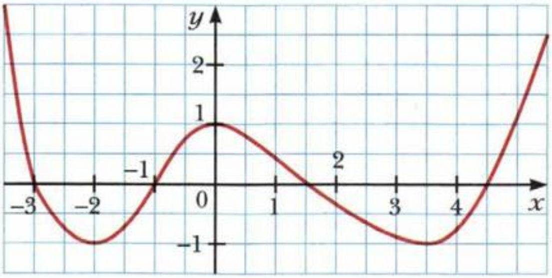
Если $k < 0$, то $k(x_2 - x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, при $k < 0$ данная функция является убывающей. ◄

1. Какое значение аргумента называют нулём функции?
2. Поясните, что называют промежутком знакопостоянства функции.
3. Какую функцию называют возрастающей на некотором промежутке?
4. Какую функцию называют убывающей на некотором промежутке?
5. Какую функцию называют возрастающей?
6. Какую функцию называют убывающей?

Упражнения

254. На рисунке 21 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Используя график, найдите:

Рис. 21



1) нули функции;

2) при каких значениях аргумента значения функции положительные;

3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

255. На рисунке 22 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Используя график, найдите:

1) нули функции;

2) при каких значениях аргумента значения функции отрицательные;

3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

Рис. 22

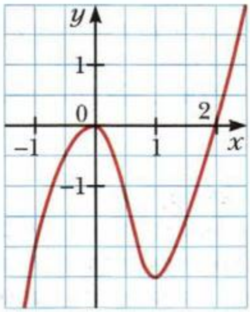
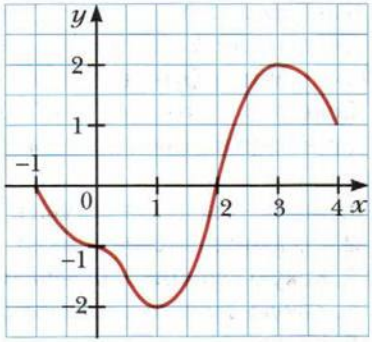


Рис. 23



256. На рисунке 23 изображён график функции, определённой на промежутке $[-1; 4]$. Используя график, найдите:

1) нули функции;

2) при каких значениях x значения функции отрицательные;

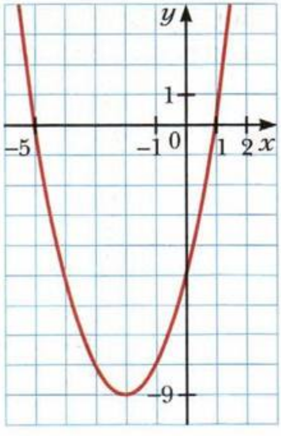
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

257. На рисунке 24 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Какие из данных утверждений верны:

1) функция убывает на промежутке $(-\infty; -9]$;

2) $f(x) < 0$ при $-5 \le x \le 1$;

Рис. 24

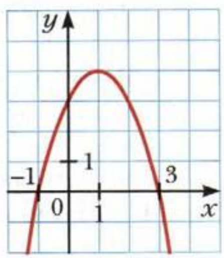


3) функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$;

4) $f(x) = 0$ при $x = -5$ и при $x = 1$;

5) функция на области определения принимает наименьшее значение при $x = -2$?

Рис. 25



258. На рисунке 25 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Используя график, найдите:

1) нули функции;
2) значения x, при которых $y < 0$;
3) промежуток убывания функции;
4) область значений функции.

259. Возрастающей или убывающей является функция:

1) $y = 9x - 4$;
2) $y = -4x + 10$;
3) $y = 12 - 3x$;
4) $y = -x$;
5) $y = \frac{1}{6}x$;
6) $y = 1 - 0{,}3x$?

260. Найдите нули функции:

1) $f(x) = 0{,}2x + 3$;
2) $g(x) = 35 - 2x - x^2$;
3) $\varphi(x) = \sqrt{x+3}$;
4) $h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 3}$;
5) $f(x) = x^3 - 4x$;
6) $f(x) = x^2 + 1$.

261. Найдите нули функции:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x + 12$;
2) $f(x) = 6x^2 + 5x + 1$;
3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;
4) $f(x) = -5$;
5) $f(x) = \frac{3 - 0{,}2x}{x + 1}$;
6) $f(x) = x^2 - x$.

262. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = 5x - 15$;
2) $y = -7x - 28$;
3) $y = x^2 - 2x + 1$;
4) $y = \frac{9}{3 - x}$.

263. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = -4x + 8$; 2) $y = -x^2 - 1$; 3) $y = \sqrt{x} + 2$.

264. Начертите график какой-либо функции, определённой на множестве действительных чисел, нулями которой являются числа: 1) -2 и 5; 2) -4, -1, 0 и 4.

265. Начертите график какой-либо функции, определённой на промежутке $[-5; 5]$, нулями которой являются числа -3, 0 и 3.

266. Начертите график какой-либо функции, определённой на промежутке $[-4; 3]$, такой, что:

1) функция возрастает на промежутке $[-4; -1]$ и убывает на промежутке $[-1; 3]$;

2) функция убывает на промежутках $[-4; -2]$ и $[0; 3]$ и возрастает на промежутке $[-2; 0]$.

267. Начертите график какой-либо функции, определённой на множестве действительных чисел, которая возрастает на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[4; +\infty)$ и убывает на промежутке $[1; 4]$.

268. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} 2x + 8, \text{если } x \le -2, \\ x^2, \text{если } -2 < x < 2, \\ -2x + 8, \text{если } x \ge 2. \end{cases}$

Используя построенный график, укажите нули функции, её промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и промежутки убывания.

269. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, \text{если } x < -1, \\ \frac{x}{4}, \text{если } -1 \le x \le 1, \\ \frac{4}{x}, \text{если } x > 1. \end{cases}$

Используя построенный график, укажите нули функции, её промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и промежутки убывания.

270. При каких значениях a функция $y = x^2 + (2a - 1)x + a^2 + a$ имеет два нуля?

271. При каких значениях a функция $y = x^2 + 6x + a$ не имеет нулей?

272. При каком наибольшем целом значении n функция $y = (8 - 3n)x - 7$ является возрастающей?

273. При каких значениях m функция $y = mx - m - 3 + 2x$ является убывающей?

274. Функция $y = f(x)$ является убывающей. Возрастающей или убывающей является функция (ответ обоснуйте):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y = \frac{1}{3}f(x)$; 3) $y = -f(x)$?

275. Функция $y = f(x)$ возрастает на некотором промежутке. Возрастает или убывает на этом промежутке функция (ответ обоснуйте):

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -2f(x)$?

276. Докажите, что функция:

1) $y = \frac{6}{3 - x}$ возрастает на промежутке $(3; +\infty)$;

2) $y = x^2 - 4x + 3$ убывает на промежутке $(-\infty; 2]$.

277. Докажите, что функция:

1) $y = \frac{7}{x + 5}$ убывает на промежутке $(-5; +\infty)$;

2) $y = 6x - x^2$ возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$.

278. Докажите, что функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ при $k > 0$ и возрастает на каждом из этих промежутков при $k < 0$.

279. При каких значениях a функция $f(x) = (a - 1)x^2 + 2ax + 6 - a$ имеет единственный нуль?

280. Постройте график функции $f(x) = x^2$, определённой на промежутке $[a; 2]$, где $a < 2$. Для каждого значения a найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

Упражнения для повторения

281. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2 + x - 6}{7x + 21}$;
3) $\frac{m^2 - 16m + 63}{m^2 - 81}$;

2) $\frac{2y - 16}{8 + 7y - y^2}$;
4) $\frac{3a^2 + a - 2}{4 - 9a^2}$.

282. Выполните умножение:

1) $(\sqrt{11} + \sqrt{6})(\sqrt{11} - \sqrt{6})$;
3) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$;

2) $(\sqrt{32} - 5)(\sqrt{32} + 5)$;
4) $(\sqrt{10} + 8)^2$.

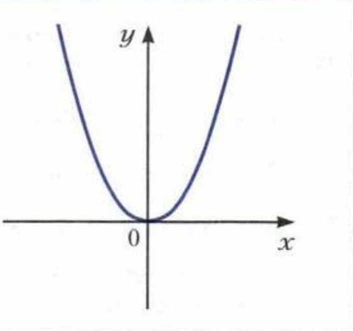
283. Два экскаватора разных моделей вырыли котлован за 8 ч. Первый экскаватор, работая самостоятельно, может вырыть такой котлован в 4 раза быстрее, чем второй. За сколько часов может вырыть такой котлован каждый экскаватор, работая самостоятельно?

284. В раствор массой 200 г, содержащий 12 % соли, добавили 20 г соли. Каким стало процентное содержание соли в новом растворе?

§ 9. Построение графика функции $y = kf(x)$

В 8 классе вы ознакомились с функцией $y = x^2$ и узнали, что её графиком является фигура, которую называют параболой (рис. 26).

Рис. 26



Покажем, как с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$.

Построим, например, график функции $y = 2x^2$.

Составим таблицу значений функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$ при одних и тех же значениях аргумента.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25
$y = 2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = 2x^2$	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

Эта таблица подсказывает, что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует единственная точка $(x_0; 2y_0)$ графика функции $y = 2x^2$. А каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = 2x^2$ является соответствующей единственной точке $\left(x_1; \frac{y_1}{2}\right)$ графика функции $y = x^2$. Поэтому все точки графика функции $y = 2x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и с ординатой, умноженной на 2 (рис. 27).

Используя график функции $y = x^2$, построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

Понятно, что все точки графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на $\frac{1}{2}$ (рис. 28).

Рис. 27

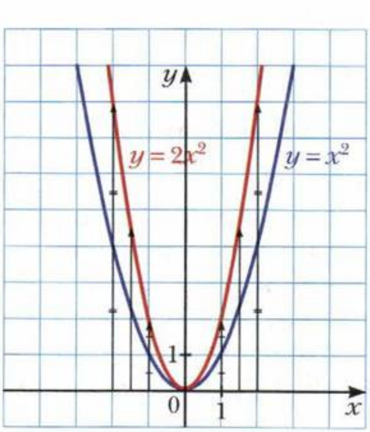
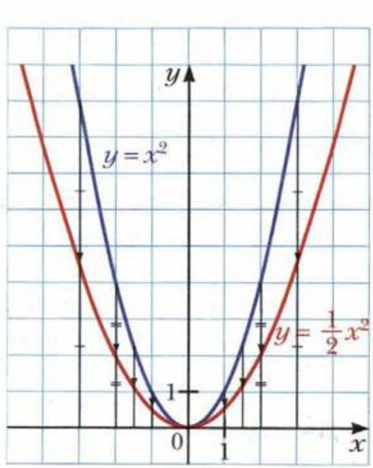


Рис. 28



Рассмотренные примеры подсказывают, как, используя график функции $y = f(x)$, можно построить график функции $y = kf(x)$, где $k > 0$.

График функции $y = kf(x)$, где $k > 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на k.

На рисунках 29, 30 показано, как «работает» это правило для построения графиков функций $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ и $y = \frac{3}{x}$.

Рис. 29

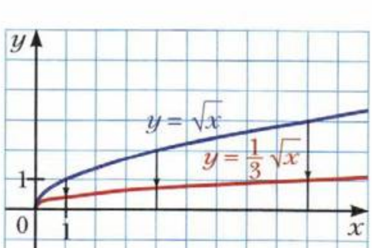
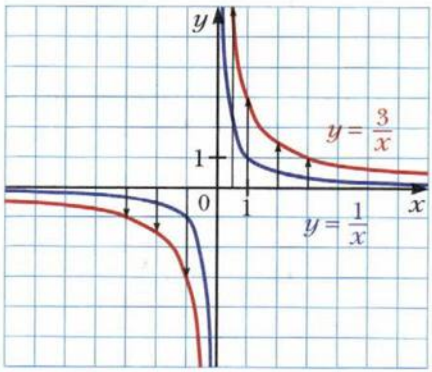


Рис. 30



Говорят, что график функции $y = kf(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ в результате **растяжения в k раз от оси абсцисс**, если $k > 1$, или в результате **сжатия в $\frac{1}{k}$ раз к оси абсцисс**, если $0 < k < 1$.

Так, график функции $y = \frac{3}{x}$ получен в результате растяжения графика функции $y = \frac{1}{x}$ в 3 раза от оси абсцисс, а график функции $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ получен в результате сжатия графика функции $y = \sqrt{x}$ в 3 раза к оси абсцисс.

Рассмотрим функции $y = x^2$ и $y = -x^2$. Каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует точка $(x_0; -y_0)$ графика функции $y = -x^2$. А каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = -x^2$ является соответствующей единственной точке $(x_1; -y_1)$ графика функции $y = x^2$. Поэтому все точки графика функции $y = -x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на -1 (рис. 31).

Теперь понятно, что правило построения графика функции $y = kf(x)$, где $k < 0$, такое же, как и для случая, когда $k > 0$.

Например, на рисунке 32 показано, как можно с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Рис. 31

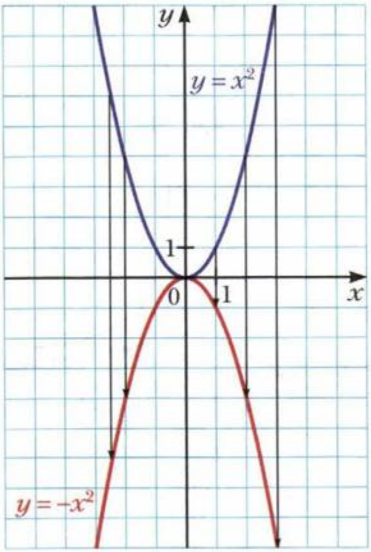


Рис. 32

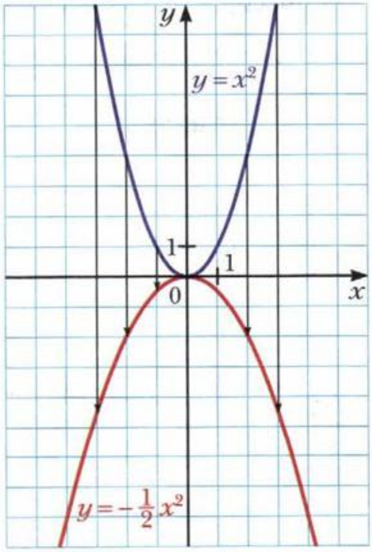


Рисунок 33 иллюстрирует, как с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ можно построить графики функций $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ и $y = -2\sqrt{x}$.

Заметим, что при $k \neq 0$ нули функций $y = f(x)$ и $y = kf(x)$ совпадают. Следовательно, графики этих функций пересекают ось абсцисс в одних и тех же точках. Этот факт проиллюстрирован на рисунке 34.

На рисунке 35 изображены графики функций $y = ax^2$ при некоторых значениях a. Каждый из этих графиков, как и график функции $y = x^2$, называют **параболой**. Точка (0; 0) является вершиной каждой из этих парабол.

Рис. 33

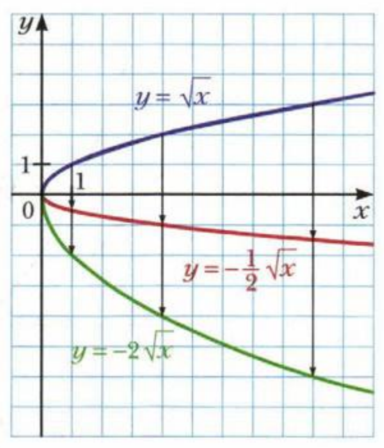
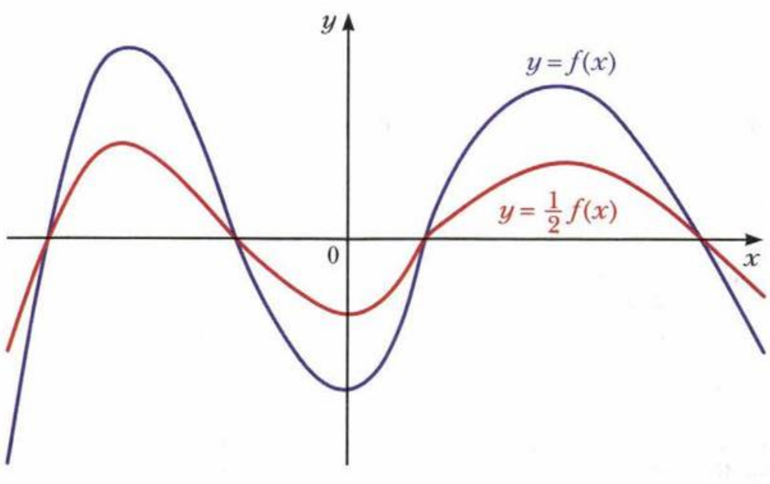


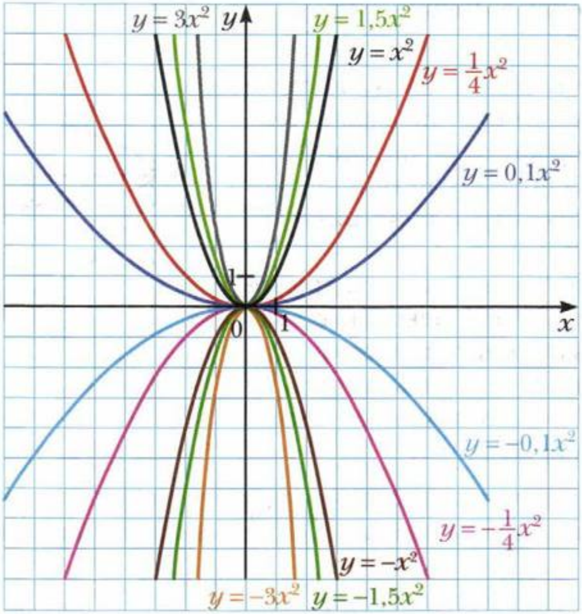
Рис. 34



Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Часто вместо высказывания «Дана функция $y = ax^2$» употребляют «Дана парабола $y = ax^2$».

Рис. 35



В таблице приведены свойства функции $y = ax^2$, $a \neq 0$.

Свойство	$a > 0$	$a < 0$
Область определения	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значений	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	$y < 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$
Возрастает на промежутке	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Убывает на промежутке	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$

1. Как можно получить график функции $y = kf(x)$, где $k \neq 0$, используя график функции $y = f(x)$?
2. Какая фигура является графиком функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$?
3. Какая точка является вершиной параболы $y = ax^2$?
4. Как направлены ветви параболы $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
5. Какова область определения функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$?
6. Какова область значений функции $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
7. На каком промежутке возрастает и на каком промежутке убывает функция $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
8. В каких координатных четвертях находится график функции $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?

Упражнения

285. Принадлежит ли графику функции $y = -25x^2$ точка:

1) $A(2; -100)$;
2) $B(-2; 100)$;
3) $C\left(-\frac{1}{5}; -1\right)$;
4) $D(-1; 25)$?

286. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения параболы $y = 3x^2$ и прямой:
1) $y = 300$;
2) $y = 42x$;
3) $y = -150x$;
4) $y = 6 - 3x$.

287. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций:
1) $y = \frac{1}{3}x^2$ и $y = 3$;
2) $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = x + 4$.

288. При каких значениях a точка $A(a; 16)$ принадлежит графику функции $y = 4x^2$?

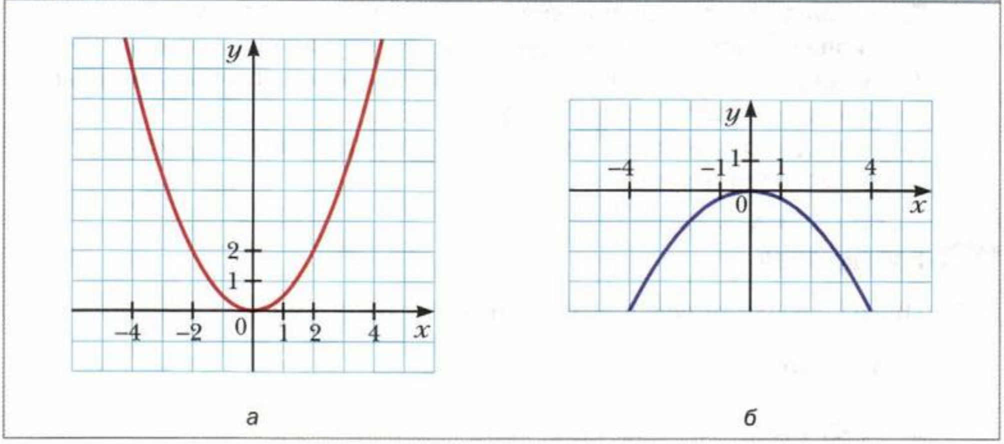
289. При каких значениях b точка $B(-2; b)$ принадлежит графику функции $y = -0{,}2x^2$?

290. Известно, что точка $M(3; -6)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Найдите значение a.

291. Известно, что точка $K(-5; 10)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Найдите значение a.

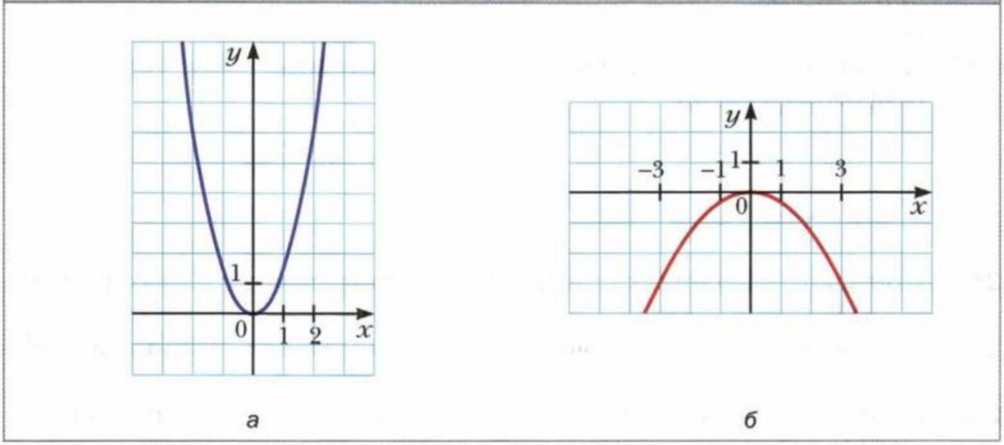
292. На рисунке 36 изображён график функции $y = ax^2$. Найдите значение a.

Рис. 36



293. На рисунке 37 изображён график функции $y = ax^2$. Найдите значение a.

Рис. 37



294. На рисунке 38 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = -2f(x)$.

295. На рисунке 39 изображён график функции $y = g(x)$. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{3}g(x)$;

2) $y = -\frac{1}{2}g(x)$.

Рис. 38

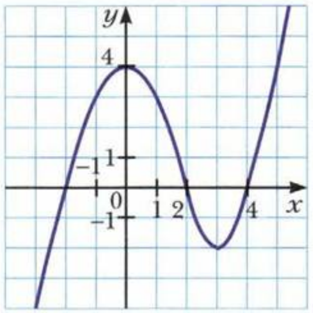
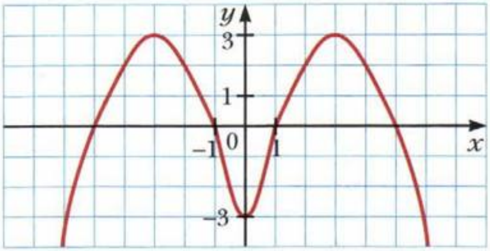


Рис. 39



296. Постройте график функции $y = x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

297. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = 4\sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$.

298. Докажите, что функция $y = ax^2$ при $a > 0$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

299. Докажите, что функция $y = ax^2$ при $a < 0$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

300. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \le -2, \\ -2x, \text{ если } -2 < x < 2, \\ -x^2, \text{ если } x \ge 2. \end{cases}$$

Используя построенный график, найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

301. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -2, \text{ если } x < -1, \\ -2x^2, \text{ если } -1 \le x \le 0, \\ 2x^2, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Используя построенный график, найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

Упражнения для повторения

302. Докажите тождество:

$$\left(\frac{m-n}{m^2+mn} - \frac{m}{mn+n^2}\right) : \left(\frac{n^2}{m^3-mn^2} + \frac{1}{m+n}\right) = \frac{n-m}{n}.$$

303. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-b)^2}$, если $b \ge a$;

2) $\sqrt{c^2+6c+9}$, если $c \ge -3$;

3) $\dfrac{\sqrt{(m-5)^4}}{m^2-10m+25}$.

304. Для перевозки 45 т груза планировали взять машину некоторой грузоподъёмности. Однако из-за её неисправности пришлось взять другую машину, грузоподъёмность которой на 2 т меньше, чем первой. Из-за этого потребовалось сделать на 6 рейсов больше, чем было запланировано. Найдите грузоподъёмность (полную загрузку) машины, которая перевезла груз.

305. Какое наименьшее значение может принимать данное выражение и при каком значении переменной:

1) $(x-6)^2+3$;
2) $(x+4)^2-5$;
3) x^2+2x-6;
4) $x^2-10x+18$?

Учимся делать нестандартные шаги

306. Для окраски одной грани кубика требуется 10 с. За какое наименьшее время 6 человек могут покрасить 101 кубик? (Два человека не могут одновременно красить один кубик.)

§ 10. Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$

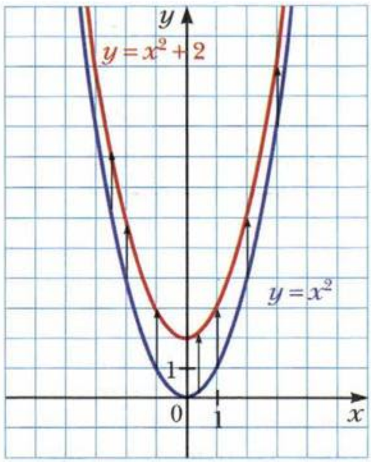
Покажем, как, используя график функции $y = x^2$, построить график функции $y = x^2 + 2$.

Составим таблицу значений этих функций при одних и тех же значениях аргумента.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25
$y = x^2 + 2$	11	8,25	6	4,25	3	2,25

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = x^2 + 2$	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11

Рис. 40



Эта таблица подсказывает, что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует точка $(x_0; y_0 + 2)$ графика функции $y = x^2 + 2$. А каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = x^2 + 2$ является соответствующей единственной точке $(x_1; y_1 - 2)$ графика функции $y = x^2$. Поэтому все точки графика функции $y = x^2 + 2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и с ординатой, увеличенной на 2 (рис. 40).

Говорят, что график функции $y = x^2 + 2$ получен в результате **параллельного переноса**[1] графика функции $y = x^2$ на 2 единицы вверх.

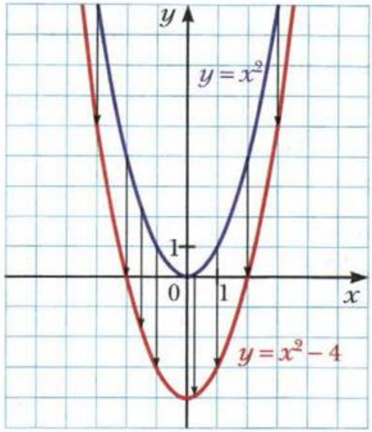
Аналогично график функции $y = x^2 - 4$ можно получить в результате

---

[1] На уроках геометрии вы более подробно ознакомитесь с параллельным переносом.

параллельного переноса графика функции $y = x^2$ на 4 единицы вниз (рис. 41).

Рис. 41



Рассмотренные примеры подсказывают, как можно, используя график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x) + b$.

График функции $y = f(x) + b$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на b единиц вверх, если $b > 0$, и на $-b$ единиц вниз, если $b < 0$.

На рисунках 42, 43 показано, как «работает» это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{x} + 3$ и $y = \frac{1}{x} - 1$.

Рис. 42

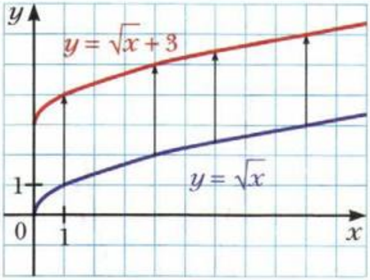
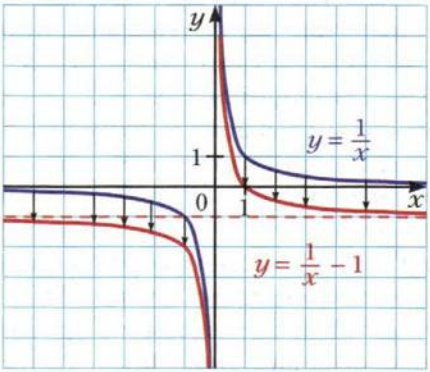


Рис. 43



Очевидно, что в результате параллельного переноса получаем фигуру, равную фигуре, являющейся графиком исходной функции. Например, каждый из графиков функций $y = x^2 + 2$ и $y = x^2 - 4$ равен параболе $y = x^2$. Поэтому графиками функций $y = x^2 + 2$ и $y = x^2 - 4$ тоже являются параболы.

Покажем, как можно с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = (x + 2)^2$.

Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, т. е. $x_0^2 = y_0$. Докажем, что точка $(x_0 - 2; y_0)$ принадлежит графику функции $y = (x + 2)^2$. Найдём значение этой функции в точке с абсциссой $x_0 - 2$. Имеем: $((x_0 - 2) + 2)^2 = x_0^2 = y_0$. Следовательно, каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует единственная точка $(x_0 - 2; y_0)$ графика функции $y = (x + 2)^2$. Аналогично можно показать, что каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = (x + 2)^2$ является соответствующей единственной точке $(x_1 + 2; y_1)$ графика функции $y = x^2$.

Поэтому все точки графика функции $y = (x + 2)^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же ординатой и абсциссой, уменьшенной на 2 (рис. 44).

Говорят, что график функции $y = (x + 2)^2$ получен в результате параллельного переноса графика функции $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на 2 единицы влево.

Покажем, как с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = (x - 2)^2$. Легко установить (сделайте это самостоятельно), что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует точка $(x_0 + 2; y_0)$ графика функции $y = (x - 2)^2$ и каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = (x - 2)^2$ является соответствующей единственной точке $(x_1 - 2; y_1)$ графика функции $y = x^2$. Поэтому график функции $y = (x - 2)^2$ получают в результате параллельного переноса графика функции $y = x^2$ на 2 единицы вправо (рис. 45).

Рис. 44

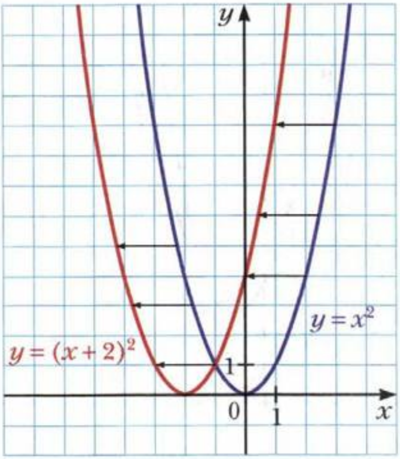
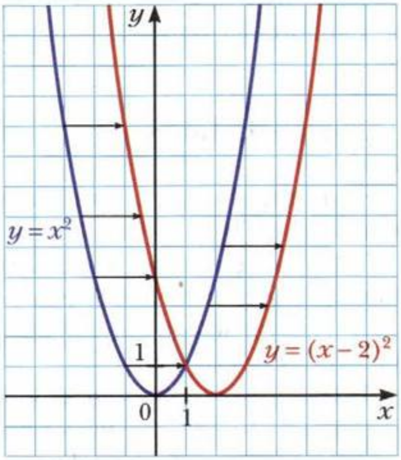


Рис. 45



Эти примеры подсказывают, как можно, используя график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x + a)$.

График функции $y = f(x + a)$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на a единиц влево, если $a > 0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a < 0$.

На рисунках 46, 47 показано, как «работает» это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{x + 3}$ и $y = \dfrac{1}{x - 1}$.

Рис. 46

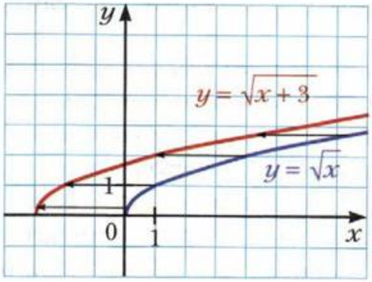
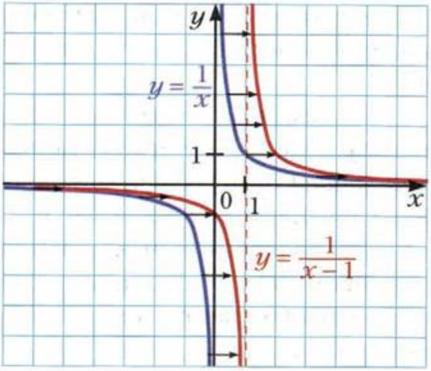


Рис. 47



Заметим, что графиками функций $y = (x + 2)^2$ и $y = (x - 2)^2$ являются параболы, равные параболе $y = x^2$.

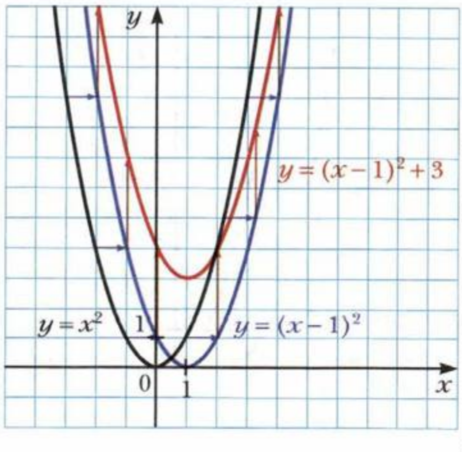
<u>**Пример 1.**</u> Постройте график функции $y = (x - 1)^2 + 3$.

Решение. 1) Построим график функции $y = x^2$ (рис. 48).

2) Параллельно перенесём график функции $y = x^2$ на 1 единицу вправо. Получим график функции $y = (x - 1)^2$ (см. рис. 48).

3) Параллельно перенесём график функции $y = (x - 1)^2$ на 3 единицы вверх. Получим график функции $y = (x - 1)^2 + 3$ (см. рис. 48). ◄

Рис. 48



Описанный алгоритм построения представим в виде такой схемы:

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{вправо на 1 ед.}} y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{вверх на 3 ед.}} y = (x-1)^2 + 3$$

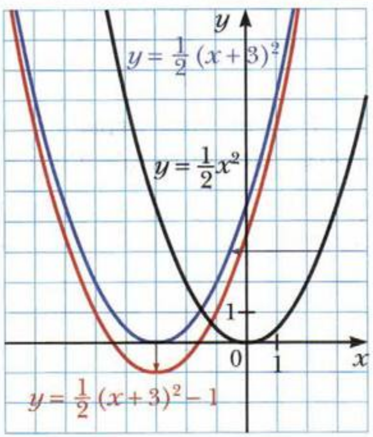
Пример 2. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$.

Решение. 1) Построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 49).

2) Параллельно перенесём график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы влево. Получим график функции $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ (см. рис. 49).

3) Параллельно перенесём график функции $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ на 1 единицу вниз. Получим искомый график (см. рис. 49).

Рис. 49



Из описанных преобразований следует, что графиком функции $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$ является парабола с вершиной в точке $(-3; -1)$, равная параболе $y = \frac{1}{2}x^2$. ◄

Схема построения имеет такой вид:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{влево на 3 ед.}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 \xrightarrow{\text{вниз на 1 ед.}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$$

Из этого примера становится понятным алгоритм построения графика функции $y = kf(x+a) + b$, в частности функции $y = k(x+a)^2 + b$.

Из построения следует, что ***графиком функции*** $\boldsymbol{y = k(x+a)^2 + b}$, $\boldsymbol{k \neq 0}$, ***является парабола, равная параболе*** $\boldsymbol{y = kx^2}$, ***вершина которой находится в точке*** $(\boldsymbol{-a}; \boldsymbol{b})$.

<u>Пример 3.</u> Постройте график функции $y = -2x^2 - 20x - 47$.

Решение. Имеем:

$y = -2x^2 - 20x - 47 = -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x + 5)^2 + 3.$

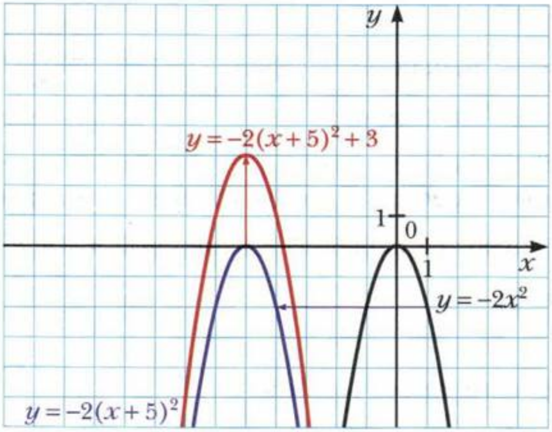
Мы представили формулу, задающую данную функцию, в виде $y = kf(x + a) + b$, где $f(x) = x^2$, $k = -2$, $a = 5$, $b = 3$.

Схема построения имеет такой вид:

$$y = -2x^2 \xrightarrow{\text{влево на 5 ед.}} y = -2(x + 5)^2 \xrightarrow{\text{вверх на 3 ед.}} y = -2(x + 5)^2 + 3$$

Построенный график является параболой с вершиной в точке $(-5; 3)$, которая равна параболе $y = -2x^2$ (рис. 50). ◄

Рис. 50



1. Как можно получить график функции $y = f(x) + b$, используя график функции $y = f(x)$?
2. Какая фигура является графиком функции $y = x^2 + b$?
3. Как можно получить график функции $y = f(x + a)$, используя график функции $y = f(x)$?
4. Какая фигура является графиком функции $y = (x + a)^2$?
5. Какая фигура является графиком функции $y = k(x + a)^2 + b$, где $k \neq 0$?
6. Каковы координаты вершины параболы $y = k(x + a)^2 + b$, где $k \neq 0$?

Упражнения

307. График какой функции получим, если график функции $y = x^2$ параллельно перенесём:

1) на 6 единиц вверх;
2) на 9 единиц вправо;
3) на 12 единиц вниз;
4) на 7 единиц влево;
5) на 2 единицы вправо и на 3 единицы вниз;
6) на 1 единицу влево и на 1 единицу вверх?

308. График какой из данных функций получим, если параллельно перенесём график функции $y = x^2$ на 4 единицы вправо:

1) $y = x^2 + 4$;
2) $y = x^2 - 4$;
3) $y = (x + 4)^2$;
4) $y = (x - 4)^2$?

309. График какой из данных функций получим, если параллельно перенесём график функции $y = x^2$ на 5 единиц вверх:

1) $y = x^2 + 5$;
2) $y = x^2 - 5$;
3) $y = (x + 5)^2$;
4) $y = (x - 5)^2$?

310. Каковы координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 + 8$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = (x + 8)^2$;
4) $y = (x - 8)^2$;
5) $y = (x - 4)^2 + 3$;
6) $y = (x + 4)^2 + 3$;
7) $y = (x - 4)^2 - 3$;
8) $y = (x + 4)^2 - 3$?

311. В какой координатной четверти находится вершина параболы:

1) $y = (x + 10)^2 - 16$;
2) $y = (x - 11)^2 + 15$;
3) $y = (x + 15)^2 + 4$;
4) $y = (x - 11)^2 - 9$?

312. Как надо параллельно перенести график функции $y = \frac{5}{x}$, чтобы получить график функции $y = \frac{5}{x - 8}$:

1) на 8 единиц вверх;
2) на 8 единиц вниз;
3) на 8 единиц вправо;
4) на 8 единиц влево?

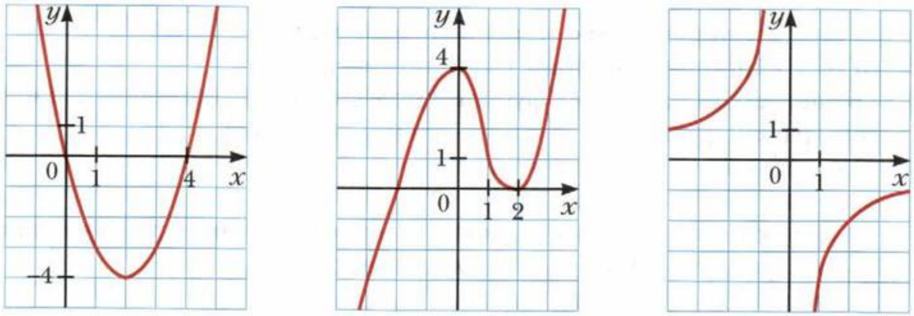
313. Как надо параллельно перенести график функции $y = \sqrt{x}$, чтобы получить график функции $y = \sqrt{x + 3}$:

1) на 3 единицы вверх;
2) на 3 единицы вниз;
3) на 3 единицы вправо;
4) на 3 единицы влево?

314. На рисунке 51 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = f(x) - 2$;
2) $y = f(x) + 4$;
3) $y = f(x - 3)$;
4) $y = f(x + 1)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = 3 - f(x)$.

Рис. 51

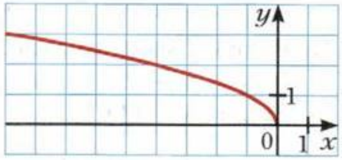


а б в

315. На рисунке 52 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$.

Рис. 52



316. Постройте график функции $y = x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = x^2 - 3$;
2) $y = x^2 + 4$;
3) $y = (x - 5)^2$;
4) $y = (x + 2)^2$;
5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

317. Постройте график функции $y = -x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = -x^2 + 1$;
2) $y = -x^2 - 2$;
3) $y = -(x - 2)^2$;
4) $y = -(x + 4)^2$;
5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

318. Постройте график функции $y = -\frac{6}{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$;
2) $y = -\frac{6}{x - 2}$;
3) $y = -\frac{6}{x + 4} - 2$.

319. Постройте график функции $y = \frac{2}{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$; 2) $y = \frac{2}{x+1}$; 3) $y = \frac{2}{x-3} + 6$.

320. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x} - 4$; 2) $y = \sqrt{x-4}$; 3) $y = \sqrt{x-1} + 3$.

321. Постройте график функции $y = (x + 5)^2 - 9$. Используя график, найдите:

1) нули функции;

2) при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения;

3) промежуток возрастания и промежуток убывания функции;

4) область значений функции.

322. Постройте график функции $y = (x - 4)^2 + 4$. Используя график, найдите:

1) нули функции;

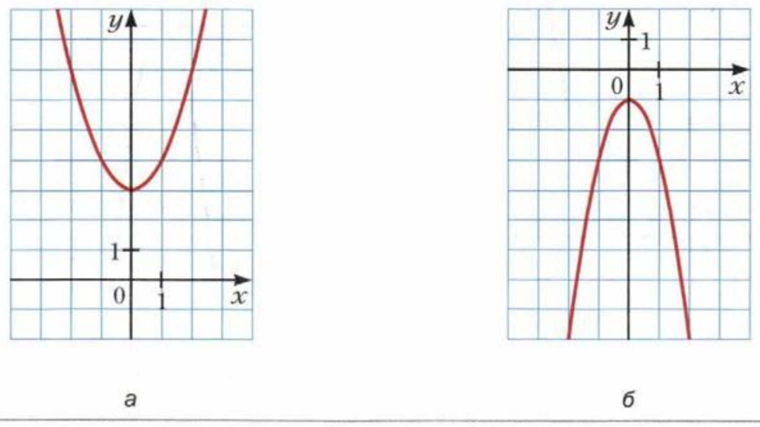
2) при каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения;

3) промежуток возрастания и промежуток убывания функции;

4) область значений функции.

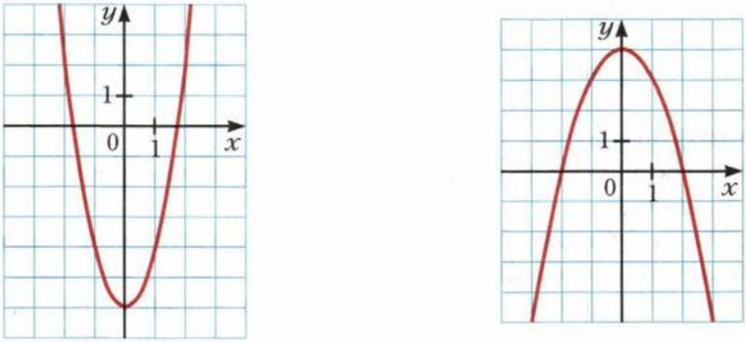
323. Задайте формулой вида $y = ax^2 + n$ функцию, график которой изображён на рисунке 53.

Рис. 53



324. Задайте формулой вида $y = ax^2 + n$ функцию, график которой изображён на рисунке 54.

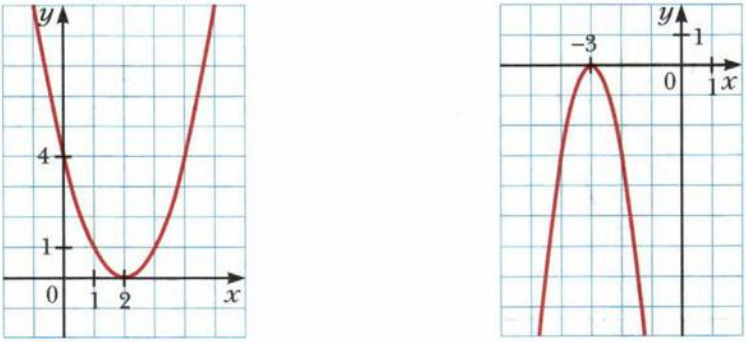
Рис. 54



а *б*

325. Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2$ функцию, график которой изображён на рисунке 55.

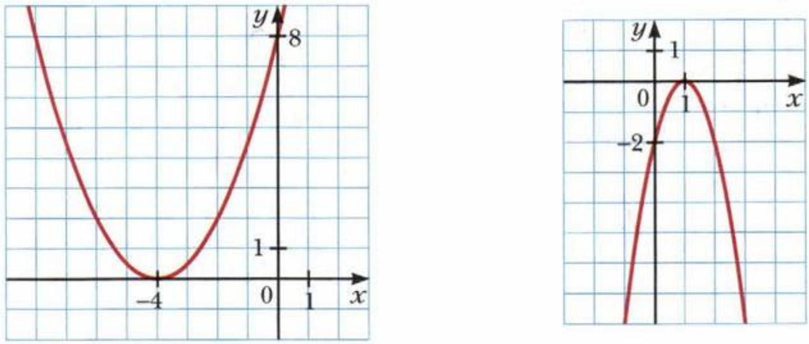
Рис. 55



а *б*

326. Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2$ функцию, график которой изображён на рисунке 56.

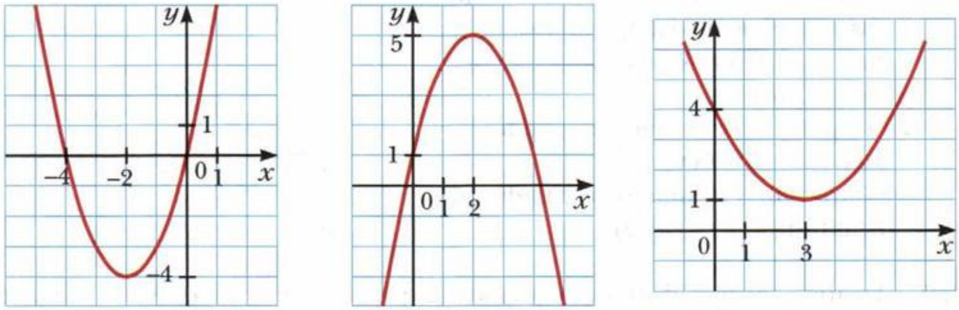
Рис. 56



а *б*

327. Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2 + n$ функцию, график которой изображён на рисунке 57.

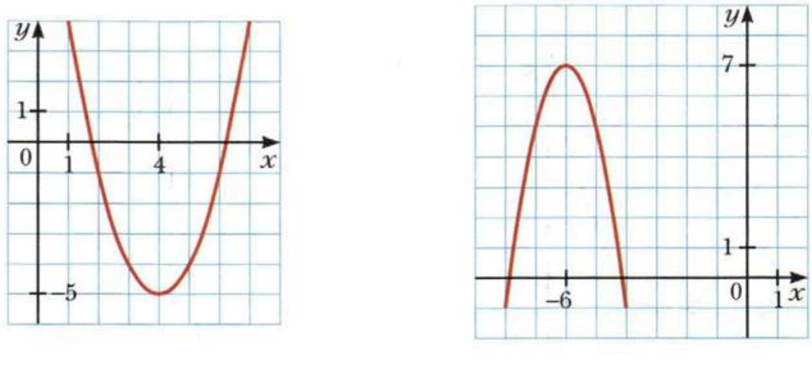
Рис. 57



а *б* *в*

328. Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2 + n$ функцию, график которой изображён на рисунке 58.

Рис. 58



а *б*

329. Решите графически уравнение:

1) $(x-1)^2 = \frac{2}{x}$; 2) $1 - x^2 = \sqrt{x} - 1$.

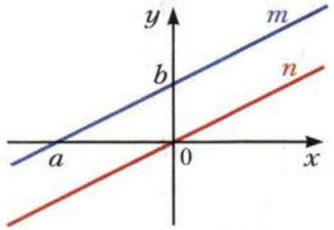
330. Решите графически уравнение $\frac{3}{x} = \sqrt{x} + 2$.

331. Прямые m и n, изображённые на рисунке 59, параллельны, причём прямая n является графиком функции $y = f(x)$. Какое из утверждений верно:

1) прямая m является графиком функции $y = f(x) + b$;

2) прямая m является графиком функции $y = f(x - a)$?

Рис. 59



332. Задайте данную функцию формулой вида $y = a(x - m)^2 + n$ и постройте её график, используя график функции $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$; 3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

2) $y = -x^2 + 6x - 6$; 4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

333. Задайте данную функцию формулой вида $y = a(x - m)^2 + n$ и постройте её график, используя график функции $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 2x - 8$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

334. Задайте данную функцию формулой вида $y = \dfrac{k}{x+a} + b$ и постройте её график, используя график функции $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{3x+8}{x}$; 2) $y = \dfrac{2x+14}{x+3}$; 3) $y = \dfrac{-2x}{x-1}$.

335. Задайте данную функцию формулой вида $y = \dfrac{k}{x+a} + b$ и постройте её график, используя график функции $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{4x+14}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{7-x}{x-2}$.

Упражнения для повторения

336. Упростите выражение:

1) $\dfrac{5a-3}{8a} + \dfrac{a+9}{4a}$;

2) $\dfrac{5a-6b}{ab} + \dfrac{5b-5c}{bc}$;

3) $\dfrac{8a+5b}{5ab^2} - \dfrac{2a-7b}{2a^2b}$;

4) $\dfrac{m^2+4n^2}{8m^4n^4} - \dfrac{3m+4n}{6m^5n^2}$.

337. Сократите дробь:

1) $\dfrac{9+\sqrt{m}}{m-81}$;

2) $\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{45}}{\sqrt{18}+\sqrt{30}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{5m}+\sqrt{7n}}{5m+2\sqrt{35mn}+7n}$;

4) $\dfrac{25m+10n\sqrt{3m}+3n^2}{5\sqrt{m}+n\sqrt{3}}$.

338. Числитель обыкновенной дроби на 1 меньше её знаменателя. Если числитель и знаменатель дроби уменьшить на 1, то её значение уменьшится на $\dfrac{1}{12}$. Найдите эту дробь.

339. Докажите, что при положительных значениях a и b выполняется неравенство $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

§ 11. Квадратичная функция, её график и свойства

Определение

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют квадратичной.

Квадратичная функция не является для вас новой. Так, в 8 классе вы изучали её частный случай, функцию $y = x^2$. Функциональная зависимость площади S круга от его радиуса r определяет квадратичную функцию $S(r) = \pi r^2$, которая является функцией вида $y = ax^2$. С этой функцией вы ознакомились в § 9.

На уроках физики вы ознакомились с формулой $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$, которая задаёт зависимость высоты h тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, от времени движения t. Эта формула задаёт квадратичную функцию $h(t) = v_0t - \frac{gt^2}{2}$.

Покажем, как график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из графика функции $y = ax^2$.

Вы уже строили графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$, выделяя квадрат двучлена (см. пример 3 в § 10). Используем этот приём в общем виде. Имеем:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Введём обозначения $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

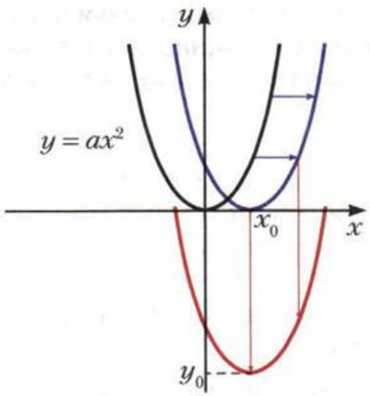
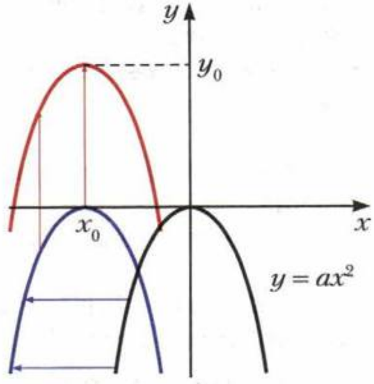
Тогда формулу $y = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Следовательно, схема построения искомого графика такова:

$$y = ax^2 \xrightarrow[\text{на } |x_0| \text{ ед.}]{\text{вправо или влево}} y = a(x - x_0)^2 \xrightarrow[\text{на } |y_0| \text{ ед.}]{\text{вверх или вниз}} y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

На рисунке 60 показано построение для случая, когда $a > 0$, $x_0 > 0$, $y_0 < 0$. На рисунке 61 показано построение для случая, когда $a < 0$, $x_0 < 0$, $y_0 > 0$.

Рис. 60	Рис. 61
	

Теперь можно сделать такой вывод: графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$, равная параболе $y = ax^2$.

Осью симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ является прямая, проходящая через вершину и перпендикулярная оси абсцисс.

Понятно, что прямая $x = -\frac{b}{2a}$ является осью симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ (см. рис. 60 и 61).

Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены так же, как и ветви параболы $y = ax^2$: если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Общее представление о графике квадратичной функции дают координаты вершины параболы и направление её ветвей. Это представление будет тем полнее, чем больше точек, принадлежащих графику, мы будем знать. Поэтому график квадратичной функции можно строить, не используя параллельных переносов, действуя по следующей схеме:

1) найти абсциссу вершины параболы по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) найти ординату вершины параболы по формуле[1] $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$ и отметить на координатной плоскости вершину параболы;

3) определить направление ветвей параболы;

4) вычислить координаты нескольких точек, принадлежащих искомому графику, в частности координаты точек пересечения с осью абсцисс (если данная функция имеет нули), координату точки пересечения с осью ординат; отметить эти точки на координатной плоскости;

5) провести через все отмеченные точки плавную непрерывную линию.

Пример. Постройте график функции $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Используя график функции, найдите область её значений, промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, наименьшее и наибольшее значения функции.

Решение. Данная функция является квадратичной. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдём абсциссу и ординату вершины параболы. Имеем: $x_0 = -\frac{4}{2} = -2$, ордината вершины $y_0 = f(x_0) = f(-2) = 4 - 8 - 5 = -9$.

Следовательно, точка $(-2; -9)$ — вершина параболы.

Найдём координаты точек пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого решим уравнение:

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Отсюда $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Следовательно, парабола пересекает ось абсцисс в точках $(-5; 0)$ и $(1; 0)$.

Найдём координаты точки пересечения параболы с осью ординат. Имеем: $f(0) = -5$. Парабола пересекает ось ординат в точке $(0; -5)$.

Отметим найденные четыре точки параболы на координатной плоскости (рис. 62).

Теперь видим, что целесообразно найти значения данной функции в точках -1, -3, -4 и отметить соответствующие точки на координатной плоскости.

Имеем: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Соединим все отмеченные точки плавной непрерывной линией.

[1] Формулу $y_0 = -\frac{D}{4a}$ запоминать необязательно. Достаточно вычислить значение функции $y = ax^2 + bx + c$ в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Искомый график изображён на рисунке 63.

Рис. 62

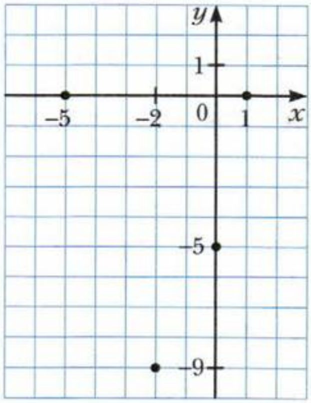
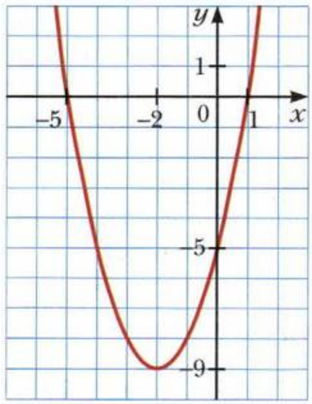


Рис. 63



Областью значений функции является множество $E(f) = [-9; +\infty)$.

Функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; -2]$.

Имеем: $f(x) > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; -5)$ и $(1; +\infty)$; $f(x) < 0$ на промежутке $(-5; 1)$.

Наименьшее значение функции равно –9, наибольшего значения не существует. ◄

1. Какую функцию называют квадратичной?
2. Какая фигура является графиком квадратичной функции?
3. По какой формуле можно найти абсциссу вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$?
4. Какая прямая является осью симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$?
5. Каково направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$ в зависимости от значения a?
6. Опишите схему построения графика квадратичной функции.

Упражнения

340. Какая из данных функций является квадратичной:

1) $y = 4x^2 + 3x + 6$;
2) $y = 4x + 3$;
3) $y = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 2}$;
4) $y = 6x^2 - 5x$?

341. Вычислите значение функции $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$, если аргумент x равен 1; –2; 4.

342. Дана функция $f(x) = x^2 - 2x - 15$. Найдите значение аргумента x, при котором:

1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) = -7$; 3) $f(x) = 33$.

343. График функции $y = -6x^2 + x + c$ пересекает ось ординат в точке $M(0; -8)$. Найдите значение c.

344. Определите направление ветвей и координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 12x + 3$; 3) $y = 0{,}3x^2 + 2{,}4x - 5$;

2) $y = -x^2 + 4x - 6$; 4) $y = -5x^2 + 10x + 2$.

345. Постройте график функции:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 4) $y = 2x^2 - 8x + 8$; 7) $y = x^2 - 6x + 5$;

2) $y = -x^2 + 2x + 3$; 5) $y = x^2 - 2x + 4$; 8) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

3) $y = 6x - x^2$; 6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$;

346. Постройте график функции:

1) $y = x^2 + 2x - 8$; 3) $y = -x^2 + 4x - 5$;

2) $y = x^2 - 2x$; 4) $y = 2x^2 - 2x - 4$.

347. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Используя график, найдите:

1) $f(6)$; $f(1)$;

2) значения x, при которых $f(x) = 8$; $f(x) = -1$; $f(x) = -2$;

3) наибольшее и наименьшее значения функции;

4) область значений функции;

5) промежуток возрастания и промежуток убывания функции;

6) при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения, а при каких отрицательные.

348. Постройте график функции $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Используя график, найдите:

1) область значений функции;

2) промежуток возрастания функции;

3) множество решений неравенства $f(x) > 0$.

349. Постройте график функции $f(x) = x - 0{,}5x^2$. Используя график, найдите:

1) область значений функции;

2) промежуток возрастания функции;

3) при каких значениях x выполняется неравенство $f(x) \leq 0$.

350. Постройте график функции $f(x) = 3x^2 - 6x$. Используя график, найдите:

1) область значений функции;

2) промежуток убывания функции;

3) при каких значениях x выполняется неравенство $f(x) \geq 0$.

351. Решите графически уравнение $x^2 - 3x - 1 = -\frac{3}{x}$.

352. Решите графически уравнение $-\frac{1}{4}x^2 + x + 2 = \sqrt{x}$.

353. Постройте в одной системе координат графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и определите количество корней уравнения $f(x) = g(x)$:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 7$; $g(x) = -\sqrt{x}$;

2) $f(x) = 4x - 2x^2$; $g(x) = -\frac{4}{x}$.

354. Построив в одной системе координат графики функций $y = x^2 + 4x + 1$ и $y = \frac{6}{x}$, определите количество корней уравнения $x^2 + 4x + 1 = \frac{6}{x}$.

355. Найдите координаты точки параболы $y = -x^2 + 9x + 9$, у которой:

1) абсцисса и ордината равны;

2) сумма абсциссы и ординаты равна 25.

356. Найдите координаты точки параболы $y = 2x^2 - 3x + 6$, у которой ордината на 12 больше абсциссы.

357. Найдите область значений и промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$;

2) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 6$;

3) $f(x) = 4 - 12x - 0{,}3x^2$;

4) $f(x) = 7x^2 + 21x$.

358. Найдите область значений и промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$;

2) $f(x) = 9 + 8x - 0{,}2x^2$.

359. Постройте график данной функции, укажите её область значений и промежутки возрастания и убывания:

$$y = \begin{cases} 3 - x, \text{если } x \le -2, \\ x^2 - 2x - 3, \text{если } -2 < x < 2, \\ -3, \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

360. Постройте график данной функции, укажите её область значений и промежутки возрастания и убывания:

$$y = \begin{cases} x, \text{если } x \le 0, \\ 4x - x^2, \text{если } 0 < x < 5, \\ x - 10, \text{если } x \ge 5. \end{cases}$$

361. Задайте формулой какую-нибудь квадратичную функцию, которая:

1) убывает на промежутке $(-\infty; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$;

2) возрастает на промежутке $(-\infty; -2]$ и убывает на промежутке $[-2; +\infty)$.

362. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 18x + 2$ на промежутке:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

363. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 - 8x + 10$ на промежутке:

1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

364. При каких значениях p и q график функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $M(-1; 4)$ и $K(2; 10)$?

365. При каких значениях a и b нулями функции $y = ax^2 + bx + 7$ являются числа -2 и 3?

366. При каких значениях a и b парабола $y = ax^2 + bx - 4$ проходит через точки $C(-3; 8)$ и $D(1; 4)$?

367. Пусть D – дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) $a > 0,\ D > 0,\ c > 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

2) $a > 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$;

3) $a < 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

4) $a < 0,\ c = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$.

368. Пусть D – дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) $a > 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$;

2) $a < 0,\ D > 0,\ c < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

3) $a < 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$.

369. При каком значении b промежуток $(-\infty; 2]$ является промежутком возрастания функции $y = -4x^2 - bx + 5$?

370. При каком значении b промежуток $(-\infty; -3]$ является промежутком убывания функции $y = 3x^2 + bx - 8$?

371. При каком значении a функция $y = ax^2 + (a - 2)x + \frac{1}{4}$ является квадратичной и её график имеет с осью абсцисс одну общую точку?

372. При каких значениях a функция $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ принимает неотрицательные значения при всех действительных значениях x?

373. При каких значениях a функция $y = -4x^2 - 16x + a$ принимает отрицательные значения при всех действительных значениях x?

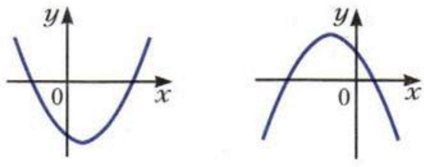
374. При каком значении c наибольшее значение функции $y = -5x^2 + 10x + c$ равно -3?

375. При каком значении c наименьшее значение функции $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ равно -1?

376. На рисунке 64 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

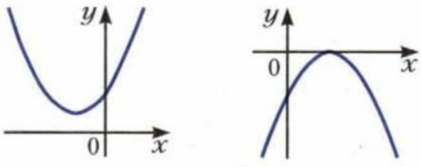
377. На рисунке 65 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

Рис. 64



а б

Рис. 65



а б

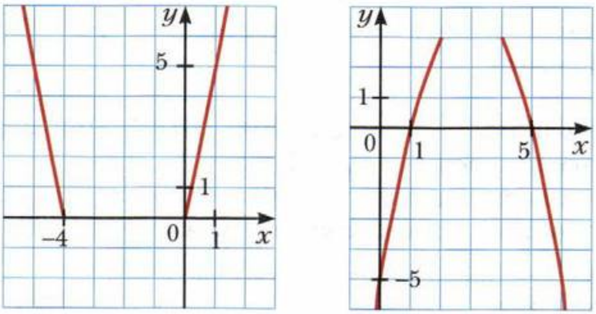
378. При каких значениях p и q вершина параболы $y = x^2 + px + q$ находится в точке $A(2; 5)$?

379. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ имеет вершину в точке $C(4; -10)$ и проходит через точку $D(1; -1)$. Найдите значения коэффициентов a, b и c.

380. Найдите ординату вершины параболы, фрагмент которой изображён на рисунке 66.

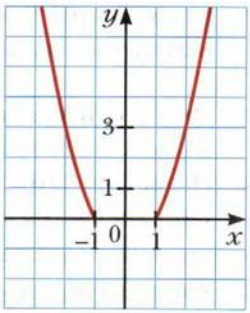
381. Найдите ординату вершины параболы, фрагмент которой изображён на рисунке 67.

Рис. 66



а б

Рис. 67



382. Сумма двух чисел равна 10. Найдите:

1) какое наибольшее значение может принимать произведение этих чисел;

2) какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов этих чисел.

383. Участок земли прямоугольной формы надо огородить забором длиной 160 м. Какую наибольшую площадь может иметь этот участок?

384. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{8x + 2x^2 - x^3}{x}$;
3) $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$;
2) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$;
4) $y = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

385. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{(x + 3)^3}{x + 3}$;
2) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}$;
3) $y = \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^2}$.

386. Постройте график функции:

1) $y = x|x|$;
3) $y = x^2 - 4|x| + 3$;
2) $y = \dfrac{x}{|x|}(x^2 - x - 6)$;
4) $y = x^2 + 3x \cdot \dfrac{|x - 3|}{x - 3} - 4$.

387. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3}{|x|} + 4x$;
2) $y = 6|x| - x^2$.

388. Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Используя построенный график, определите, при каких значениях a уравнение $x^2 + 2x - 3 = a$:
1) имеет два корня;
2) имеет один корень;
3) не имеет корней.

389. Постройте график функции $y = -x^2 - 4x + 5$. Используя построенный график, определите, сколько корней имеет уравнение $-x^2 - 4x + 5 = a$ в зависимости от значения a.

390. Пусть x_1 и x_2 — нули функции $y = -3x^2 - (3a - 2)x + 2a + 3$. При каких значениях a выполняется неравенство $x_1 < -2 < x_2$?

391. Известно, что x_1 и x_2 — нули функции $y = 2x^2 - (3a - 1)x + a - 4$, $x_1 < x_2$. При каких значениях a число 1 принадлежит промежутку $[x_1; x_2]$?

Упражнения для повторения

392. Решите уравнение:
1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
3) $x^4 + 9x^2 + 8 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$;
4) $x^4 - 16x^2 = 0$.

393. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

1) $x^2 - 5x - 10 = 0$;
2) $2x^2 + 6x - 7 = 0$;
3) $-\frac{1}{3}x^2 + 8x - 1 = 0$.

394. Выполните действия:

1) $\frac{b+3}{b-3}+\frac{b-2}{b+2}$; 2) $\frac{p+4}{p-1}-\frac{p+20}{p+5}$; 3) $\frac{x}{2x+3}-\frac{x+1}{2x-3}$.

395. Упростите выражение:

1) $(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(4a-6\sqrt{ab}+9b)-9\sqrt{9b^3}$;

2) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{28}+4\sqrt{63})\cdot\sqrt{7}-\sqrt{126}$;

3) $(2-\sqrt{3}+\sqrt{6})(2+\sqrt{3}-\sqrt{6})$.

396. Моторная лодка отправилась по реке от одной пристани к другой и вернулась обратно через 2,5 ч, потратив на стоянку 25 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 20 км/ч, а расстояние между пристанями – 20 км.

397. Через одну из двух труб бак можно наполнить водой на 10 мин быстрее, чем через другую. За какое время можно заполнить этот бак через каждую из труб, если при одновременной их работе в течение 8 мин будет заполнено $\frac{2}{3}$ бака?

Учимся делать нестандартные шаги

398. На доске записано число 1001. Двое играют в такую игру. За один ход нужно стереть записанное на доске число, а вместо него записать разность этого числа и любого его делителя. Ходы игроки делают поочерёдно. Проигрывает тот игрок, после хода которого на доске будет записано число 0. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш?

Когда сделаны уроки

О некоторых преобразованиях графиков функций

Как построить график функции $y = f(-x)$, если известен график функции $y = f(x)$

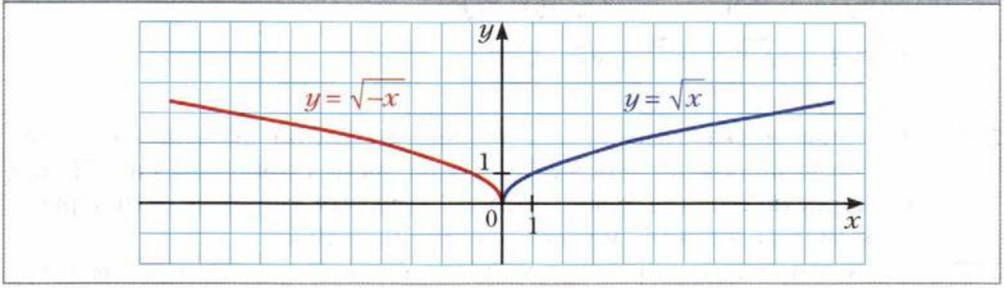
Заметим, что если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(-x)$. Действительно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Поэтому все точки графика функции $y = f(-x)$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с такой же ординатой и противоположной абсциссой[1].

[1] На уроках геометрии вы узнаете, что описанное преобразование графика функции $y = f(x)$ называют осевой симметрией.

На рисунке 68 показано, как с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ построен график функции $y = \sqrt{-x}$.

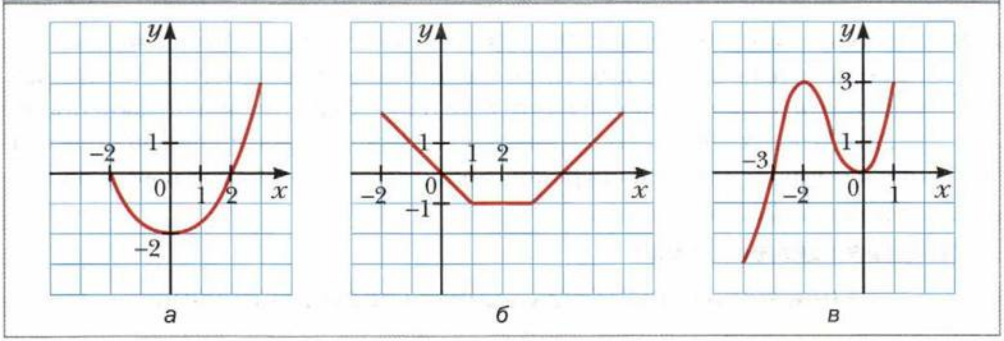
Рис. 68



Упражнения

1. Используя график функции $y = f(x)$, изображённый на рисунке 69, постройте график функции $y = f(-x)$.

Рис. 69



2. Постройте график функции $y = \sqrt{x - 2}$. Используя полученный график, постройте график функции $y = \sqrt{-x - 2}$.

Как построить график функции $y = f(|x|)$, если известен график функции $y = f(x)$

Для функции $y = f(|x|)$ можно записать:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \geq 0, \\ f(-x), \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Отсюда делаем вывод, что график функции $y = f(|x|)$ при $x \geq 0$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$, а при $x < 0$ – с графиком функции $y = f(-x)$.

Тогда построение графика функции $y = f(|x|)$ можно проводить по такой схеме:

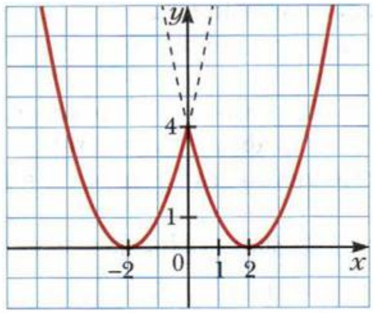
1) построить ту часть графика функции $y = f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные абсциссы;

2) построить ту часть графика функции $y = f(-x)$, все точки которой имеют отрицательные абсциссы.

Объединение этих двух частей и составит график функции $y = f(|x|)$.

На рисунке 70 показано, как с помощью графика функции $y = (x - 2)^2$ построен график функции $y = (|x| - 2)^2$.

Рис. 70



Упражнения

1. Используя график функции $y = f(x)$, изображённый на рисунке 69, постройте график функции $y = f(|x|)$.

2. Используя график функции $y = x + 2$, постройте график функции $y = |x| + 2$.

3. Постройте график функции:

1) $y = |x| - 3$;
2) $y = x^2 - 4|x|$;
3) $y = x^2 + 2|x| - 3$;
4) $y = 2|x| - x^2$;
5) $y = \frac{4}{|x|}$;
6) $y = \frac{4}{|x|} - 2$;
7) $y = \frac{4}{|x| - 2}$;
8) $y = \sqrt{|x|}$.

Как построить график функции $y = |f(x)|$, если известен график функции $y = f(x)$

Для функции $y = |f(x)|$ можно записать:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что график функции $y = |f(x)|$ при всех x, для которых $f(x) \geq 0$, совпадает с графиком функции $y = f(x)$, а при всех x, для которых $f(x) < 0$, – с графиком функции $y = -f(x)$.

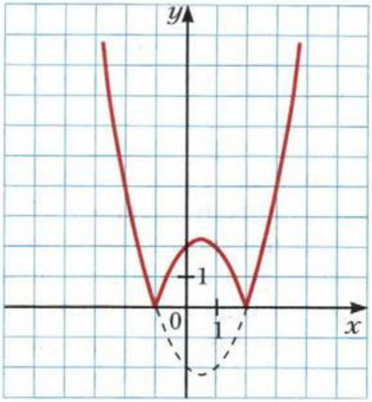
Тогда строить график функции $y = |f(x)|$ можно по такой схеме:

1) все точки графика функции $y = f(x)$ с неотрицательными ординатами оставить без изменений;

2) точки с отрицательными ординатами заменить на точки с теми же абсциссами, но с противоположными ординатами.

На рисунке 71 показано, как с помощью графика функции $y = x^2 - x - 2$ построен график функции $y = |x^2 - x - 2|$.

Рис. 71



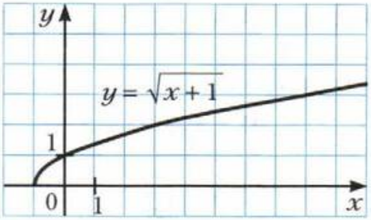
Пример 1. Постройте график функции $y = \left|\sqrt{|x| + 1} - 2\right|$.

Решение. Схема построения искомого графика имеет такой вид:

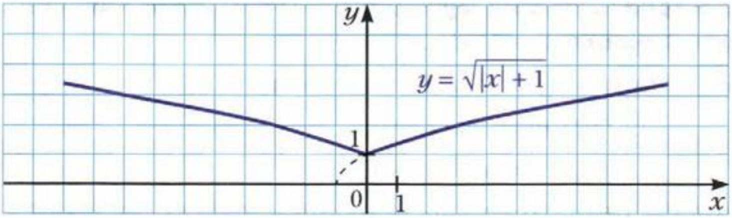
$$y = \sqrt{x+1} \longrightarrow y = \sqrt{|x|+1} \longrightarrow y = \sqrt{|x|+1} - 2 \longrightarrow y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|$$

(рис. 72). ◄

Рис. 72

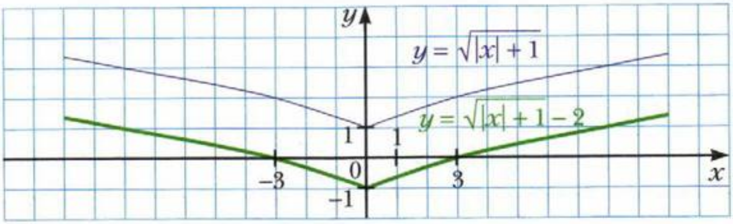


а

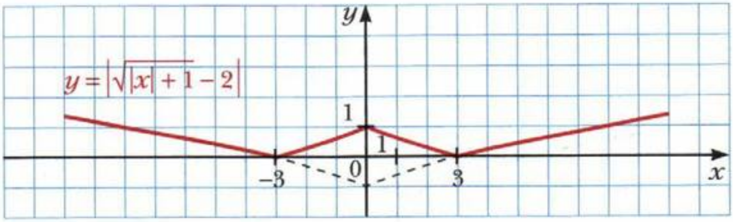


б

Рис. 72 (окончание)



в



г

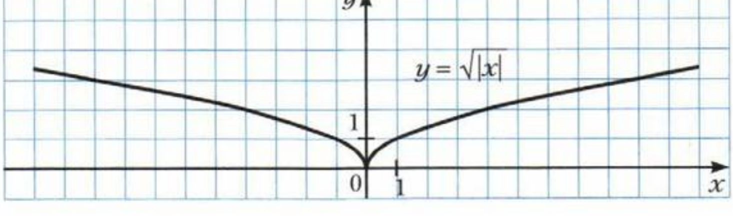
Пример 2. Постройте график функции $y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|$.

Решение. Схема построения искомого графика имеет такой вид:

$y=\sqrt{|x|} \longrightarrow y=\sqrt{|x+1|} \longrightarrow y=\sqrt{|x+1|}-1 \longrightarrow y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|$

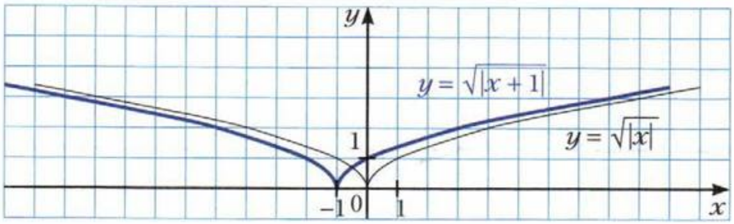
(рис. 73). ◄

Рис. 73

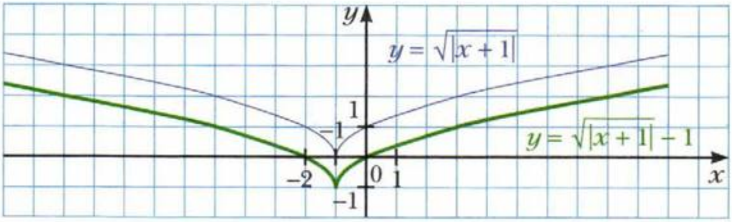


а

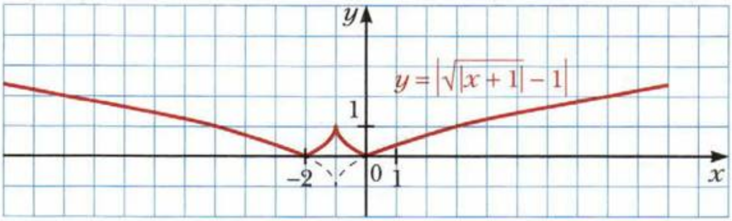
Рис. 73 (окончание)



б



в



г

Упражнения

1. Используя график функции $y = f(x)$, изображённый на рисунке 69, постройте график функции:
1) $y = |f(x)|$; 2) $y = |f(|x|)|$.

2. Используя график функции $y = x + 2$, постройте график функции $y = |x + 2|$.

3. Постройте график функции:

1) $y = |x - 3|$; 3) $y = |x^2 + 2x - 3|$; 5) $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$;

2) $y = |x^2 - 4x|$; 4) $y = |2x - x^2|$; 6) $y = \left|\frac{4}{x - 2}\right|$.

4. Постройте график функции:

1) $y = ||x| - 3|$; 3) $y = |x^2 + 2|x| - 3|$; 5) $y = \left|\frac{4}{|x|} - 2\right|$;

2) $y = |x^2 - 4|x||$; 4) $y = |2|x| - x^2|$; 6) $y = \left|\frac{4}{|x| - 2}\right|$.

5. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{4 - |x|}$; 3) $y = \left|3 - \sqrt{4 - |x|}\right|$; 5) $y = 3 - \sqrt{|4 - x|}$;

2) $y = 3 - \sqrt{4 - |x|}$; 4) $y = \sqrt{|4 - x|}$; 6) $y = \left|3 - \sqrt{|4 - x|}\right|$.

Задание № 2 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Чему равно значение функции $f(x) = 2x^2 - 1$ в точке $x_0 = -3$?
А) -19 Б) -13 В) 11 Г) 17

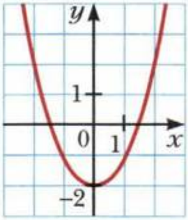
2. Среди приведённых функций укажите квадратичную.
А) $y = 2x - 5$ В) $y = 2x^2 - 5$
Б) $y = 2\sqrt{x} - 5$ Г) $y = \frac{2}{x^2} - 5$

3. Областью определения какой из функций является промежуток $(-\infty; 6)$?
А) $y = \sqrt{6 + x}$ В) $y = \frac{1}{\sqrt{6 + x}}$
Б) $y = \frac{1}{\sqrt{6 - x}}$ Г) $y = \sqrt{6 - x}$

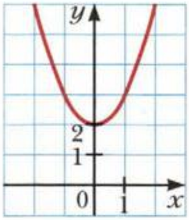
4. Как надо параллельно перенести график функции $y = \frac{7}{x}$, чтобы получить график функции $y = \frac{7}{x - 5}$?
А) на 5 единиц вверх В) на 5 единиц вправо
Б) на 5 единиц влево Г) на 5 единиц вниз

5. График функции $y = \sqrt{x}$ параллельно перенесли на 2 единицы влево и на 7 единиц вниз. График какой функции получили?
А) $y = \sqrt{x + 2} - 7$ В) $y = \sqrt{x - 2} + 7$
Б) $y = \sqrt{x - 2} - 7$ Г) $y = \sqrt{x + 2} + 7$

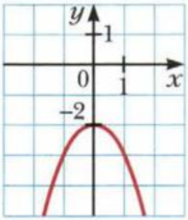
6. На каком из рисунков изображён график функции $y = -x^2 + 2$?



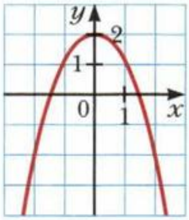
А



Б



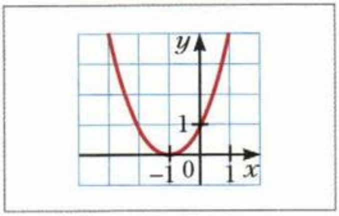
В



Г

7. График какой функции изображён на рисунке?

А) $y = x^2 - 1$
Б) $y = x^2 + 1$
В) $y = (x - 1)^2$
Г) $y = (x + 1)^2$

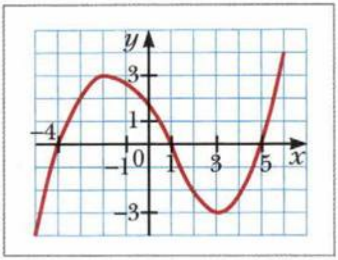


8. Укажите координаты вершины параболы $y = 3(x - 4)^2 - 5$.

А) (4; 5) Б) (−4; 5) В) (4; −5) Г) (−4; −5)

9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Используя рисунок, укажите промежуток убывания функции.

А) $[-4; 1]$
Б) $[-3; 3]$
В) $[-2; 3]$
Г) $[-3; 1]$



10. Найдите абсциссу вершины параболы $y = 2x^2 - 12x + 3$.

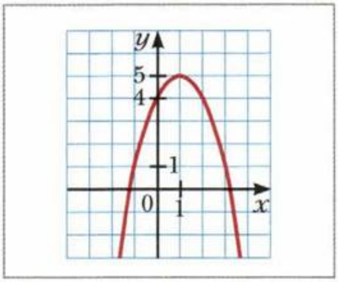
А) 6 Б) −6 В) 3 Г) −3

11. Вершина какой из парабол принадлежит оси абсцисс?

А) $y = x^2 - 6$ В) $y = (x - 6)^2$
Б) $y = x^2 - 6x$ Г) $y = (x - 6)^2 + 2$

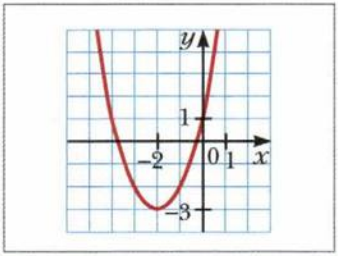
12. На рисунке изображён график функции $y = -x^2 + 2x + 4$. Используя рисунок, найдите область значений функции.

А) $(-\infty; +\infty)$
Б) $(-\infty; 1]$
В) $[1; +\infty)$
Г) $(-\infty; 5]$



13. На рисунке изображён график функции $y = x^2 + 4x + 1$. Используя рисунок, укажите промежуток возрастания функции.

А) $(-\infty; -2]$
Б) $[-2; +\infty)$
В) $[-3; +\infty)$
Г) определить невозможно



14. Найдите нули функции $y = 2x^2 + x - 6$.

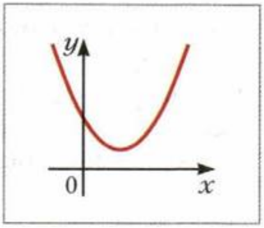
А) $-1{,}5; -2$ Б) $1{,}5; 2$ В) $-1{,}5; 2$ Г) $1{,}5; -2$

15. При каких значениях b и c вершина параболы $y = x^2 + bx + c$ находится в точке $M(3; 8)$?

А) $b = 6$, $c = -19$ В) $b = -3$, $c = 8$

Б) $b = -6$, $c = 17$ Г) определить невозможно

16. На рисунке изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Укажите верное утверждение, если D – дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.



А) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D > 0$

Б) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D < 0$

В) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D < 0$

Г) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D = 0$

17. При каком значении a наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 6x + a$ равно 4?

А) -5 Б) 4 В) 7 Г) 8

18. Известно, что $m - n = 8$. Найдите множество значений выражения mn.

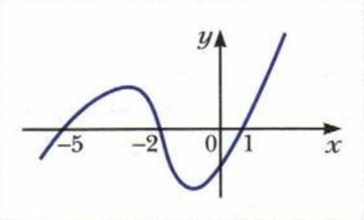
А) $[-16; +\infty)$ В) $(-\infty; +\infty)$

Б) $[8; +\infty)$ Г) определить невозможно

§ 12. Решение квадратных неравенств

На рисунке 74 изображён график некоторой функции $y = f(x)$, областью определения которой является множество действительных чисел.

Рис. 74



С помощью этого графика легко определить промежутки знакопостоянства функции f, а именно: $y > 0$ на каждом из промежутков $(-5; -2)$ и $(1; +\infty)$; $y < 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; -5)$ и $(-2; 1)$.

Определив промежутки знакопостоянства функции f, мы тем самым решили неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Множество решений неравенства $f(x) > 0$ можно записать так:

$$(-5; -2) \cup (1; +\infty).$$

Множество решений неравенства $f(x) < 0$ можно записать так:

$$(-\infty; -5) \cup (-2; 1).$$

Такой метод решения неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ с помощью графика функции $y = f(x)$ называют **графическим**.

Покажем, как с помощью этого метода решают **квадратные неравенства**.

Определение

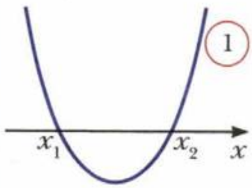
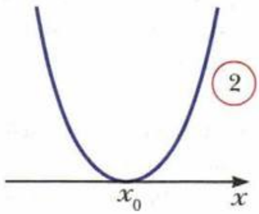
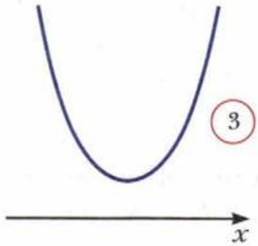
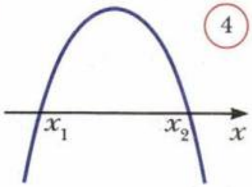
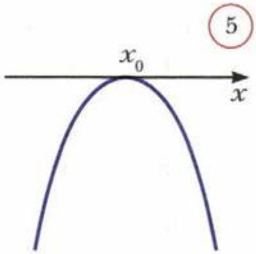
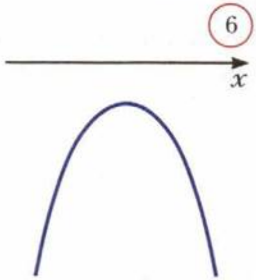
Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют квадратными.

Выясним, как определить положение графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс.

Наличие и количество нулей квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определяют с помощью дискриминанта D квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$: если $D > 0$, то нулей у функции два, если $D = 0$, то нуль один, если $D < 0$, то нулей нет.

Знак старшего коэффициента квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ определяет направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ – вниз.

Схематическое расположение параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков чисел a и D отображено в таблице (x_1 и x_2 – нули функции, x_0 – абсцисса вершины параболы).

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Разъясним, как эту таблицу можно использовать для решения квадратных неравенств.

Пусть, например, надо решить неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, где $a < 0$ и $D > 0$. Этим условиям соответствует ячейка 4 таблицы. Тогда ясно, что ответом будет промежуток $(x_1; x_2)$, на котором график соответствующей квадратичной функции расположен над осью абсцисс.

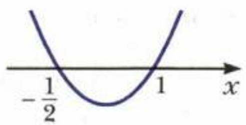
Пример 1. Решите неравенство $2x^2 - x - 1 > 0$.

Решение. Для квадратного трёхчлена $2x^2 - x - 1$ имеем: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Этим условиям соответствует ячейка 1 таблицы. Решим уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$. Получим $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Тогда схематически график функции $y = 2x^2 - x - 1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 75.

Из рисунка 75 видно, что соответствующая квадратичная функция принимает положительные значения на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $(1; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. ◄

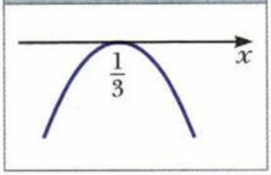
Рис. 75



Пример 2. Решите неравенство $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

Решение. Имеем: $a = -9$, $D = 0$. Этим условиям соответствует ячейка 5 таблицы. Устанавливаем, что $x_0 = \frac{1}{3}$. Тогда схематически график функции $y = -9x^2 + 6x - 1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 76.

Рис. 76



Из рисунка 76 видно, что решениями неравенства являются все числа, кроме $\frac{1}{3}$.

Заметим, что это неравенство можно решить другим способом. Перепишем данное неравенство так: $9x^2 - 6x + 1 > 0$. Тогда $(3x - 1)^2 > 0$. Отсюда получаем тот же результат.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. ◄

Пример 3. Решите неравенство $3x^2 - x + 1 < 0$.

Решение. Имеем: $a = 3 > 0$, $D = -11 < 0$. Этим условиям соответствует ячейка 3 таблицы. В этом случае график функции $y = 3x^2 - x + 1$ не имеет точек с отрицательными ординатами.

Ответ: решений нет. ◄

Пример 4. Решите неравенство $0{,}2x^2 + 2x + 5 \le 0$.

Решение. Так как $a = 0{,}2$, $D = 0$, то данному случаю соответствует ячейка 2 таблицы, причём $x_0 = -5$. Но в этом случае квадратичная функция принимает только неотрицательные значения. Следовательно, данное неравенство имеет единственное решение $x = -5$.

Ответ: -5. ◄

1. Какие неравенства называют квадратными?
2. Какие возможны случаи расположения параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков a и D, где D — дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$? Изобразите схематически эти случаи.

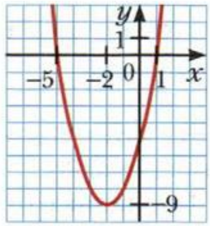
Упражнения

399. Какие из чисел -2; 0; 1 являются решениями неравенства:
1) $x^2 - x - 2 < 0$; 2) $x^2 + x \ge 0$; 3) $-3x^2 - x + 2 > 0$?

400. На рисунке 77 изображён график функции $y = x^2 + 4x - 5$. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 + 4x - 5 < 0$;
2) $x^2 + 4x - 5 \le 0$;
3) $x^2 + 4x - 5 > 0$;
4) $x^2 + 4x - 5 \ge 0$.

Рис. 77



401. На рисунке 78 изображён график функции $y = -3x^2 - 6x$. Найдите множество решений неравенства:

1) $-3x^2 - 6x < 0$; 3) $-3x^2 - 6x > 0$;
2) $-3x^2 - 6x \le 0$; 4) $-3x^2 - 6x \ge 0$.

402. На рисунке 79 изображён график функции $y = x^2 - 4x + 4$. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 - 4x + 4 < 0$; 3) $x^2 - 4x + 4 > 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 \le 0$; 4) $x^2 - 4x + 4 \ge 0$.

403. На рисунке 80 изображён график функции $y = -x^2 + 2x - 2$. Найдите множество решений неравенства:

1) $-x^2 + 2x - 2 < 0$; 3) $-x^2 + 2x - 2 > 0$;
2) $-x^2 + 2x - 2 \le 0$; 4) $-x^2 + 2x - 2 \ge 0$.

Рис. 78

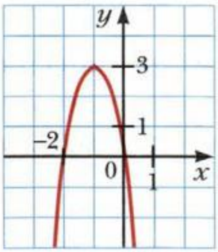


Рис. 79

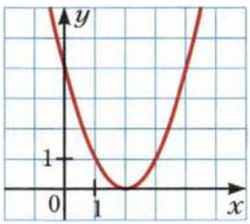
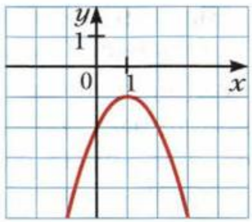


Рис. 80



404. Решите неравенство:

1) $x^2 + 6x - 7 < 0$; 9) $x^2 - 12x + 36 > 0$;
2) $x^2 - 2x - 48 \ge 0$; 10) $4x^2 - 12x + 9 \ge 0$;
3) $-x^2 - 6x - 5 > 0$; 11) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
4) $-x^2 + 4x - 3 < 0$; 12) $49x^2 - 14x + 1 \le 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \le 0$; 13) $2x^2 - x + 3 > 0$;
6) $2x^2 + 3x + 1 > 0$; 14) $3x^2 - 4x + 5 \le 0$;
7) $4x^2 - 12x \le 0$; 15) $-4x^2 + 5x - 7 > 0$;
8) $4x^2 - 9 > 0$; 16) $-2x^2 + 3x - 2 \le 0$.

405. Решите неравенство:

1) $x^2 + 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 3x + 2 \le 0$;
3) $-x^2 + 12x + 45 < 0$;
4) $-3x^2 - 5x - 2 \ge 0$;
5) $x^2 - 5x > 0$;
6) $-25x^2 + 16 \le 0$;
7) $5x^2 - 3x + 1 \ge 0$;
8) $-3x^2 + 6x - 4 > 0$;
9) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \le 0$;
10) $-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36} > 0$;
11) $2x^2 - 2x + 0{,}5 < 0$.

406. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 \le 49$; 2) $x^2 > 5$; 3) $7x^2 \le 4x$; 4) $0{,}9x^2 < -27x$.

407. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 > 1$; 2) $x^2 < 3$; 3) $-3x^2 \ge -12x$; 4) $-2x^2 < -128$.

408. Решите неравенство:

1) $x(x + 5) - 2 < 4x$;
2) $11 - (x + 1)^2 \le x$;
3) $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \le 5$;
4) $5x(x + 4) - (2x - 3)(2x + 3) > 30$;
5) $(3x - 7)(x + 2) - (x - 4)(x + 5) > 30$;
6) $\frac{2x^2 - 1}{4} - \frac{3 - 4x}{6} + \frac{8x - 5}{8} \le \frac{19}{24}$.

409. Решите неравенство:

1) $2(x^2 + 2) \ge x(x + 5)$;
2) $x - (x + 4)(x + 5) > -5$;
3) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(x + 2) < 7 - 3x$;
4) $\frac{x - 1}{4} - \frac{2x - 3}{2} < \frac{x^2 + 3x}{8}$.

410. При каких значениях x:

1) значения трёхчлена $-3x^2 + 6x + 1$ больше $-\frac{4}{3}$;

2) значения трёхчлена $-5x^2 + 11x + 2$ не больше $-\frac{2}{5}$?

411. При каких значениях x:

1) значения трёхчлена $x^2 - 2x - 11$ меньше $\frac{1}{4}$;

2) значения трёхчлена $-3x^2 + 8x + 6$ не меньше $-\frac{2}{3}$?

412. При каких значениях аргумента значения функции $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 9$ больше соответствующих значений функции $y = 2x - 1$?

413. При каких значениях аргумента значения функции $y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 1$ меньше соответствующих значений функции $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4$?

414. Найдите целые решения неравенства:
1) $x^2 + 5x \le 0$;
3) $6x^2 + x - 2 \le 0$;
2) $x^2 - 10 < 0$;
4) $-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 > 0$.

415. Сколько целых решений имеет неравенство:
1) $20 - 8x - x^2 > 0$;
2) $4x^2 - 15x - 4 < 0$?

416. Найдите наименьшее целое решение неравенства:
1) $42 - x^2 - x > 0$;
2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$.

417. Найдите наибольшее целое решение неравенства:
1) $1{,}5x^2 - 2x - 2 < 0$;
2) $-2x^2 - 15x - 25 \ge 0$.

418. Составьте какое-нибудь неравенство, множество решений которого:
1) объединение промежутков $(-\infty; -4)$ и $(8; +\infty)$;
2) промежуток $[-2; 9]$;
3) состоит из одного числа 7.

419. Найдите область определения функции:
1) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$;
3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}$;
2) $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$;
4) $y = \frac{x + 2}{\sqrt{6x - 2x^2}}$.

420. Найдите область определения выражения:
1) $\sqrt{2x^2 - 9x - 18}$;
2) $\frac{1}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$.

421. Равносильны ли неравенства:
1) $x^2 - 2x - 15 > 0$ и $x^2 - 2x - 15 \ge 0$;
2) $\frac{1}{x^2 - x - 20} < 0$ и $\frac{1}{x^2 - x - 20} \le 0$;
3) $x^2 - 6x + 10 > 0$ и $-x^2 + x - 1 \le 0$;
4) $x^2 + 2x + 3 < 0$ и $-2x^2 - 4 > 0$?

422. При каких значениях a не имеет корней уравнение:
1) $x^2 - ax + 4 = 0$;
2) $x^2 + (a - 2)x + 25 = 0$;
3) $4{,}5x^2 - (4a + 3)x + 3a = 0$?

423. При каких значениях b имеет два различных действительных корня уравнение:
1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$;
2) $2x^2 + 2(b - 6)x + b - 2 = 0$?

424. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0, \\ x > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \le 0, \\ 6x - x^2 < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \ge 0, \\ x + 4 \ge 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \ge 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$

425. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \le 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \le 0. \end{cases}$

426. Найдите целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 18 \ge 0, \\ x^2 + 4x - 5 \le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - (\sqrt{5} - 3)x - 3\sqrt{5} \le 0, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$

427. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} + \sqrt{x + 1};$ 3) $y = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \dfrac{9}{x^2 - 81};$

2) $y = \dfrac{x - 3}{\sqrt{18 + 3x - x^2}} + \dfrac{8}{x - 5};$ 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 - 7x - 3x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{x + 1}}.$

428. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{20 + 4x - 3x^2} + \dfrac{3}{\sqrt{8 - 4x}};$ 2) $y = \dfrac{x + 5}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \dfrac{x - 1}{|x| - 6}.$

429. Найдите множество решений неравенства:
1) $x^2 - 8|x| - 33 < 0;$ 2) $8x^2 + 7|x| - 1 \ge 0.$

430. Найдите множество решений неравенства:
1) $5x^2 - 7|x| + 2 \ge 0;$ 2) $x^2 + 10|x| - 24 \le 0.$

431. Решите неравенство:

1) $|x| \cdot (x^2 + 3x - 10) < 0;$ 4) $(x + 5)^2(x^2 - 2x - 15) > 0;$

2) $\sqrt{x}(x^2 + 2x - 8) \le 0;$ 5) $\dfrac{x^2 + 7x - 8}{(x - 4)^2} \ge 0;$

3) $(x - 2)^2(x^2 - 8x - 9) < 0;$ 6) $\dfrac{x^2 + 10x - 11}{(x + 3)^2} \le 0.$

432. Решите неравенство:

1) $|x| \cdot (x^2 - 5x + 6) > 0;$ 3) $(x + 3)^2(x^2 - x - 6) > 0;$

2) $\sqrt{x}(x^2 + 6x - 40) > 0;$ 4) $\dfrac{3x^2 - 8x - 3}{(x - 1)^2} \le 0.$

433. Решите неравенство:

1) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}>0$;
3) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}<0$;
2) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}\ge 0$;
4) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}\le 0$.

434. Решите неравенство:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}>0$;
3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}<0$;
2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\ge 0$;
4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\le 0$.

435. При каких значениях a данное неравенство выполняется при всех действительных значениях x:

1) $x^2-4x+a>0$;
2) $x^2+(a-1)x+1-a-a^2\ge 0$;
3) $-\frac{1}{4}x^2+5ax-9a^2-8a<0$;
4) $(a-1)x^2-(a+1)x+a+1>0$?

436. При каких значениях a не имеет решений неравенство:

1) $-x^2+6x-a>0$;
2) $x^2-(a+1)x+3a-5<0$;
3) $ax^2+(a-1)x+(a-1)<0$?

437. Для каждого значения a решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2-5x+4>0, \\ x>a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x^2-3x-1\le 0, \\ x<a. \end{cases}$

438. Для каждого значения a решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2-x-72<0, \\ x>a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2-9x+8>0, \\ x<a. \end{cases}$

Упражнения для повторения

439. Упростите выражение:

1) $\frac{x^2+3xy}{x+6}:\frac{x^2-9y^2}{2x+12}$;

2) $\frac{4a^2-12ab+9b^2}{2a^2-8b^2}\cdot\frac{2a^2-8ab+8b^2}{6a-9b}$.

440. Найдите значение выражения, не пользуясь таблицей квадратов и калькулятором:

1) $\sqrt{20\cdot 66\cdot 330}$;
3) $2\sqrt{18}\cdot 3\sqrt{30}\cdot 5\sqrt{15}$;
2) $\sqrt{3^5\cdot 12^3}$;
4) $6\sqrt{10}\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{50}$.

441. Первая бригада может собрать урожай за 12 дней. Второй бригаде для выполнения этой же работы требуется 75 % этого времени. После того как первая бригада проработала 5 дней, к ней присоединилась вторая бригада, и они вместе закончили работу. Сколько дней бригады работали вместе?

442. Во время первой поездки автомобиля потратили 10 % бензина, который был в баке, а во время второй – 25 % оставшегося. После этого в баке осталось на 13 л меньше бензина, чем было сначала. Сколько литров бензина было в баке до первой поездки?

Готовимся к изучению новой темы

443. Является ли пара чисел (2; –3) решением уравнения:
1) $4x - 3y = 17$; 2) $x^2 + 5 = y^2$; 3) $xy = 6$?

444. График уравнения $5x - y = 2$ проходит через точку $A(4; b)$. Чему равно значение b?

445. Постройте график уравнения:
1) $4x + y = 3$;
2) $2x - 3y = 6$;
3) $xy = -8$;
4) $(x - 2)^2 + y^2 = 0$;
5) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$;
6) $x^2 + y^2 = 4$;
7) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10 = 0$;
8) $(x - 3)(y - x) = 0$;
9) $\dfrac{y - x}{y^2 - 1} = 0$.

446. Какая из пар чисел (–2; 1), (2; –1), (6; 4) является решением системы уравнений $\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28? \end{cases}$

447. Решите графически систему уравнений:
1) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5. \end{cases}$

448. Решите систему уравнений:
1) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26. \end{cases}$

Обновите в памяти содержание п. 35–36 на с. 273–274.

§ 13. Системы уравнений с двумя переменными

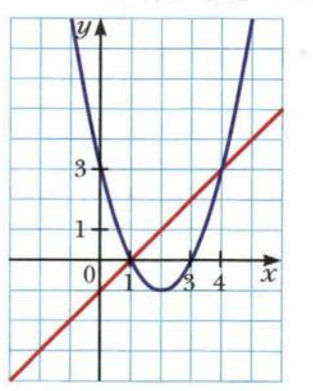
В 7 классе вы познакомились с графическим методом решения систем уравнений. Напомним, что его суть заключается в поиске координат общих точек графиков уравнений, входящих в систему. На уроках геометрии вы узнали, что графиком уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где $R > 0$, является окружность радиуса R с центром $(a; b)$. Вы также научились строить график квадратичной функции. Всё это расширяет возможности применения графического метода для решения систем уравнений.

Пример 1. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы равносильно такому: $y = x^2 - 4x + 3$. Его графиком является парабола, изображённая на рисунке 81.

Рис. 81



Графиком второго уравнения является прямая, которая пересекает построенную параболу в двух точках: (1; 0) и (4; 3) (см. рис. 81).

Как известно, графический метод не гарантирует того, что полученный результат является точным. Поэтому найденные решения следует проверить. Проверка подтверждает, что пары чисел (1; 0) и (4; 3) действительно являются решениями данной системы. ◄

Заметим, что эта система является «удобной» для графического метода: координаты точек пересечения графиков оказались целыми числами. Понятно, что такая ситуация встречается далеко не всегда. Поэтому графический метод эффективен тогда, когда нужно определить количество решений или достаточно найти их приближённые значения.

Рассмотренную систему можно решить, не обращаясь к графикам уравнений. Готовясь к изучению этой темы, вы повторили **метод подстановки** решения систем линейных уравнений. Этот метод является эффективным и для решения более сложных систем, в которых только одно уравнение является линейным, и для некоторых систем, в которых вообще нет линейных уравнений.

Решим систему $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$ методом подстановки.

Выразим переменную y через переменную x во втором уравнении системы:

$$y = x - 1.$$

Подставим в первое уравнение вместо y выражение $x - 1$:

$$x^2 - 4x - (x - 1) + 3 = 0.$$

Получили уравнение с одной переменной. Упростим его: $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Значения y, которые соответствуют найденным значениям x, найдём из уравнения $y = x - 1$. Имеем:

$y_1 = 1 - 1 = 0$, $y_2 = 4 - 1 = 3$.

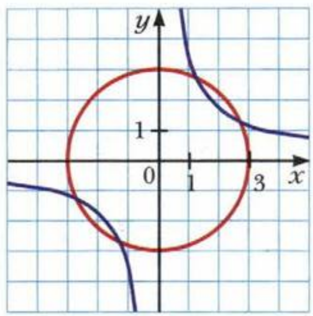
Ответ: (1; 0), (4; 3). ◄

<u>**Пример 2.**</u> Определите количество решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$

Решение. Графиком первого уравнения системы является окружность с центром (0; 0) радиуса 3.

Второе уравнение системы равносильно такому: $y = \dfrac{3,5}{x}$. Графиком этого уравнения является гипербола.

Рис. 82



Изобразим окружность и гиперболу на одной координатной плоскости (рис. 82). Мы видим, что графики пересекаются в четырёх точках. Следовательно, данная система имеет четыре решения. ◄

Рисунок 82 также позволяет определить приближённые значения решений данной системы.

Не обращаясь к графическому методу, можно найти точные значения решений этой системы.

Готовясь к изучению этой темы, вы повторили **метод сложения** для решения систем линейных уравнений. Покажем, как этот метод «работает» и при решении более сложных систем.

Умножим второе уравнение рассматриваемой системы на 2. Получим:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 2xy = 7. \end{cases}$$

Сложим почленно левые и правые части уравнений. Получаем: $x^2 + y^2 + 2xy = 16$. Отсюда $(x + y)^2 = 16$; $x + y = 4$ или $x + y = -4$.

Ясно, что для решения данной системы достаточно решить две более простые системы.

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2xy = 7. \end{cases}$ Отсюда

$\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x(4 - x) = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Решив второе уравнение этой системы, получим:

$x_1 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$.

Тогда $y_1 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$.

2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 2xy = 7. \end{cases}$ Отсюда

$\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x(-4 - x) = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x^2 + 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Решив второе уравнение этой системы, получим:

$x_3 = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_4 = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}$.

Тогда $y_3 = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}$, $y_4 = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{4 - \sqrt{2}}{2}; \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{4 + \sqrt{2}}{2}; \frac{4 - \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-4 - \sqrt{2}}{2}; \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-4 + \sqrt{2}}{2}; \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}\right)$. ◄

Очевидно, что получить такой ответ графическим методом невозможно.

В 8 классе вы познакомились с **методом замены переменных** при решении уравнений. Этот метод применяется и для решения целого ряда систем уравнений.

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Решение. Пусть $\frac{x + y}{x - y} = t$. Тогда $\frac{x - y}{x + y} = \frac{1}{t}$.

Теперь первое уравнение системы можно записать так:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}.$$

Отсюда $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Для решения исходной системы достаточно решить две более простые системы.

1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$ Отсюда

$\begin{cases} x + y = 2x - 2y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Тогда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$ Отсюда

$\begin{cases} 2x + 2y = x - y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем: $y_3 = 1$, $y_4 = -1$. Тогда $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Ответ: (3; 1), (−3; −1), (−3; 1), (3; −1). ◄

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + 2y + xy = 8, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 14. \end{cases}$

Решение. Заметим, что данная система не изменится, если заменить x на y, а y на x. В таких случаях может оказаться эффективной замена $x + y = u$, $xy = v$.

Перепишем данную систему так:

$$\begin{cases} 2(x + y) + xy = 8, \\ (x + y)^2 - 2xy + 3(x + y) = 14. \end{cases}$$

Выполним указанную замену. Получим систему:

$$\begin{cases} 2u + v = 8, \\ u^2 - 2v + 3u = 14. \end{cases}$$

Её можно решить методом подстановки (сделайте это самостоятельно). Получаем:

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u = -10, \\ v = 28. \end{cases}$$

Остаётся решить две системы:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28. \end{cases}$$

Каждую из них можно решить методом подстановки. Однако здесь удобнее воспользоваться теоремой, обратной теореме Виета. Так, для системы $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases}$ можно считать, что x и y — корни квадратного уравнения $t^2 - 3t + 2 = 0$. Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Следовательно, пары (1; 2) и (2; 1) являются решениями этой системы.

Используя теорему, обратную теореме Виета, легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что система $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28 \end{cases}$ решений не имеет.

Ответ: (1; 2), (2; 1). ◄

1. Какие методы решения систем уравнений вы знаете?
2. Поясните суть графического метода решения систем уравнений.
3. В каких случаях графический метод является наиболее эффективным?

Упражнения

449. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + x^2 = 3, \\ y = x - 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

450. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x + 2, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

451. Решите методом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 - 2y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 2, \\ x^2 - 2xy = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 4y = 2, \\ xy + 2y = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

452. Решите методом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 28; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6. \end{cases}$

453. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases}$
4) $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$
5) $\begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases}$
6) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4. \end{cases}$

454. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = (x-5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$
3) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1. \end{cases}$

455. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ (x-3)(y+5) = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$
6) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - x - 2y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

456. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases}$
3) $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5. \end{cases}$

457. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:
1) прямой $3x - y = 1$ и параболы $y = 3x^2 + 8x - 3$;
2) прямой $2x - y = 2$ и гиперболы $y = \dfrac{4}{x}$;
3) прямой $x + y = 1$ и окружности $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 16$;
4) парабол $y = x^2 - 4x + 7$ и $y = 3 + 4x - 2x^2$.

458. Докажите, что прямая $y - x = 3$ является касательной к окружности $(x+5)^2 + y^2 = 2$, найдите координаты точки касания.

459. Докажите, что:

1) прямая $y = -2x - 4$ и парабола $y = 6x^2 - 7x - 2$ не пересекаются;

2) парабола $y = 4x^2 - 3x + 6$ и прямая $y = x + 5$ имеют одну общую точку, найдите координаты этой точки;

3) параболы $y = 4x^2 - 3x - 24$ и $y = 2x^2 - 5x$ имеют две общие точки, найдите их координаты.

460. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12}, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3. \end{cases}$

461. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5}, \\ 3x + y = 8. \end{cases}$

462. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ xy(x + y) = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{21}{10}, \\ x + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{6y}{x} = 5, \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 18; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} + xy = -10, \\ \dfrac{5y}{x} - 2xy = 13; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3(x + y)^2 + 2(x - 2y)^2 = 5, \\ 2(x - 2y) - x - y = 1. \end{cases}$

463. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2{,}5, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x - 2y}{x + y} - \dfrac{x + y}{x - 2y} = \dfrac{15}{4}, \\ 4x + 5y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} = 4, \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x} = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 72; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4(x-y)^2 + 7(x-y) = 15, \\ 2x + 5y = 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x-y)^2 + 2x = 35 + 2y, \\ (x+y)^2 + 2y = 3 - 2x. \end{cases}$

464. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ xy = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 28, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 19, \\ xy = -6. \end{cases}$

465. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 56, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x^2 - y^2 = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$

466. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3y - 2xy = 2, \\ x + 2xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + y = 30, \\ xy + x = 28; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10. \end{cases}$

467. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x + y + xy = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy - x = 24, \\ xy - y = 25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy + 2x = -4, \\ 3xy + y = -8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 66, \\ 2x^2 - y^2 = 34. \end{cases}$

468. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = 36, \\ x + 6y = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - 2xy = 32, \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 100; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -1. \end{cases}$

469. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + 10xy + 25y^2 = 49, \\ x - 5y = -3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x + 2y, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 25y^2 = 104, \\ xy = -4. \end{cases}$

470. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = a \end{cases}$

1) имеет одно решение;
2) имеет два решения;
3) не имеет решений?

471. При каких значениях k система уравнений $\begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y = kx + 3 \end{cases}$

1) имеет одно решение;
2) имеет два решения;
3) не имеет решений?

472. Сколько решений в зависимости от значения a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a? \end{cases}$

473. Сколько решений в зависимости от значения a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$

Упражнения для повторения

474. Докажите, что значение выражения $25^{10} - 5^{17}$ кратно числу 31.

475. Упростите выражение:

$$\frac{5a + 5}{a^2 - a} : \left(\frac{a + 3}{a^2 - 1} - \frac{1}{a^2 + a}\right).$$

476. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2(x - 3) \ge -3(x + 2), \\ \frac{7x}{3} \le 1 - \frac{x}{2}. \end{cases}$$

477. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 6x - 2 = 0$. Найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

478. Сократите дробь:

1) $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{7\sqrt{3} - 21}{14\sqrt{3}}$; 3) $\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y}$.

Готовимся к изучению новой темы

479. (*Из старинного китайского трактата «Девять отделов искусства счёта».*) 5 волов и 2 барана стоят 11 таэлей, а 2 вола и 8 баранов – 8 таэлей. Сколько стоят отдельно вол и баран?

480. (*Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи).*) Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько денег у каждого?

481. Из села A в село B, расстояние между которыми равно 140 км, выехал мотоциклист. За 20 мин до этого навстречу ему из B в A выехал велосипедист, который встретился с мотоциклистом через 2 ч после своего выезда. Найдите скорость каждого из них, если мотоциклист за 2 ч проезжает на 104 км больше, чем велосипедист за 4 ч.

Учимся делать нестандартные шаги

482. Существуют ли 100 таких натуральных чисел, что любая сумма нескольких из них не является квадратом натурального числа?

Задание № 3 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. При каких значениях x выполняется неравенство $x^2 > 4$?

А) $x > 2$ В) $x < -2$ или $x > 2$

Б) $x > 2$ или $x > -2$ Г) $-2 < x < 2$

2. Каково множество решений неравенства $x^2 + 8x - 9 \geq 0$?

А) $(-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$ В) $(-\infty; -1) \cup (9; +\infty)$

Б) $(-\infty; -9] \cup [1; +\infty)$ Г) $(-\infty; -1] \cup [9; +\infty)$

3. Сколько целых решений имеет неравенство $3x^2 + 5x - 8 < 0$?

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6

4. Какое из данных неравенств выполняется при всех действительных значениях переменной?

А) $x^2 - 14x + 49 > 0$ В) $x^2 - 3x + 4 > 0$

Б) $-3x^2 + x + 2 \leq 0$ Г) $-x^2 + 7x - 10 < 0$

5. Какова область определения функции $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{8x - 4x^2}}$?

А) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ В) $[0; 2]$

Б) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ Г) $(0; 2)$

6. Укажите неравенство, не имеющее решений.

А) $x^2 - 6x + 10 < 0$ В) $-3x^2 + 8x + 3 < 0$

Б) $-5x^2 + 3x + 2 > 0$ Г) $-x^2 - 10x > 0$

7. Пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений $\begin{cases} y - x = 2, \\ xy - y = 10. \end{cases}$ Чему равно значение выражения $x_1y_1 + x_2y_2$?

А) 23 Б) 7 В) 35 Г) -26

8. Какие фигуры являются графиками уравнений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -3? \end{cases}$

А) прямая и парабола В) окружность и гипербола

Б) окружность и парабола Г) парабола и гипербола

9. Сколько общих точек имеют графики уравнений $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$ и $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 4$?

А) 0 Б) 4 В) 2 Г) 1

10. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ x + y = 1? \end{cases}$

А) решений нет В) два решения

Б) одно решение Г) четыре решения

11. Какое наибольшее значение принимает выражение $x + y$, если пара чисел $(x; y)$ является решением системы уравнений
$$\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -7? \end{cases}$$
А) 1 Б) 6 В) 0 Г) –5

12. Пара чисел $(a; b)$ является решением системы уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 9. \end{cases}$$ Найдите значение выражения $a - b$.

А) 5 Б) 1 В) $\frac{1}{6}$ Г) $\frac{5}{6}$

13. Пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений $\begin{cases} 2x - xy = 5, \\ y + xy = 6. \end{cases}$ Найдите значение выражения $|x_1y_1 - x_2y_2|$.

А) 1 Б) 11 В) 70 Г) 10

14. При каких значениях b уравнение $3x^2 - bx + 3 = 0$ не имеет корней?
А) $-6 < b < 6$ В) $b > 6$
Б) $b < 6$ Г) $b < -6$ или $b > 6$

15. При каком значении a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = a \end{cases}$ имеет единственное решение?
А) $a = 5$ В) $a = -5$ или $a = 5$
Б) $a = 5\sqrt{2}$ Г) $a = -5\sqrt{2}$ или $a = 5\sqrt{2}$

16. При каких значениях a неравенство $ax^2 - 4x + a \geq 0$ имеет единственное решение?
А) $a = 2$ или $a = -2$ В) $a = -2$
Б) $a = 2$ Г) таких значений не существует

17. При каких значениях a неравенство $ax^2 - 2x + a < 0$ не имеет решений?
А) $a < -1$ или $a > 1$ В) $-1 < a < 1$
Б) $a \geq 1$ Г) таких значений не существует

18. При каких значениях a прямая $2x - y = a$ имеет с параболой $y = x^2 - 8$ одну общую точку?
А) $a = 8$ В) $a = -9$
Б) $a = 9$ Г) таких значений не существует

Итоги главы 2

Функция

Пусть X — множество значений независимой переменной, Y — множество значений зависимой переменной. Функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной из множества Y.

Нуль функции

Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют нулём функции.

Промежуток знакопостоянства

Промежуток, на котором функция принимает значения одного знака, называют промежутком знакопостоянства функции.

Возрастание и убывание функции

Функцию f называют возрастающей на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функцию f называют убывающей на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Построение графика функции $y = kf(x)$

График функции $y = kf(x)$, где $k \neq 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на k.

Построение графика функции $y = f(x) + b$

График функции $y = f(x) + b$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на b единиц вверх, если $b > 0$, и на $-b$ единиц вниз, если $b < 0$.

Построение графика функции $y = f(x + a)$

График функции $y = f(x + a)$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на a единиц влево, если $a > 0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a < 0$.

Квадратичная функция

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют квадратичной.

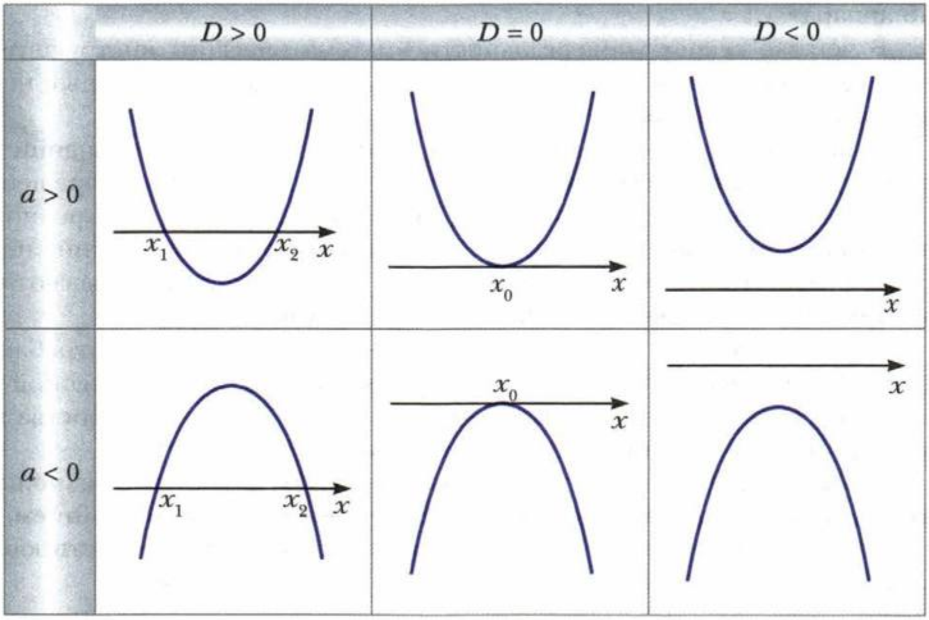
График квадратичной функции

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, абсцисса вершины которой $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют квадратными.

Схематическое расположение параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс



Глава 3. Элементы прикладной математики

Изучая материал этой главы, вы сможете расширить свои представления о математических моделях реальных ситуаций. Узнаете, какую задачу называют прикладной и из каких этапов состоит её решение.

Вы усовершенствуете свои умения проводить процентные расчёты, ознакомитесь с формулой сложных процентов и возможностями её применения.

Вы узнаете, что такое абсолютная и относительная погрешности.

§ 14. Математическое моделирование

Наверное, нет сегодня такой области знаний, где бы не применялись достижения математики. Физики и химики, астрономы и биологи, географы и экономисты, даже языковеды и историки используют математический аппарат.

В чём же секрет универсальности «математического инструмента»? Ответ очевиден: ключ к решению многих научных задач – их удачный перевод на язык математики.

Действительно, формулировки задач из разных областей знаний содержат нематематические понятия. Если математик участвует в решении такой задачи, то он в первую очередь стремится перевести её на «родной», математический, язык, т. е. язык выражений, формул, уравнений, неравенств, функций, графиков и т. д. Результат такого перевода называют **математической моделью**, а саму задачу – **прикладной задачей**.

Термин «модель» (от лат. *modulus* – «образец») мы употребляем очень часто: модель самолёта, модель атомного ядра, модель Солнечной системы, модель какого-то процесса или явления и т. п. Изучая свойства модели объекта, мы тем самым изучаем свойства самого объекта.

Область математики, которая занимается построением и изучением математических моделей, называют **математическим моделированием**.

В таблице приведены образцы прикладных задач и соответствующих им математических моделей.

№	Прикладная задача	Математическая модель
1	Один килограмм картофеля стоит 24 р. Сколько картофеля можно купить за 120 р.?	Чему равно частное 120 : 24?
2	В магазине есть 3 вида чашек и 2 вида тарелок. Сколько существует способов составить набор из одной чашки и одной тарелки?	Чему равно произведение $3 \cdot 2$?
3	На стоянке было несколько автомобилей. Когда 5 машин уехало, осталось 2 машины. Сколько автомобилей было на стоянке сначала?	Найдите корень уравнения $x - 5 = 2$
4	Из 156 жёлтых, 234 белых и 390 красных роз составили букеты. Какое наибольшее количество букетов можно составить так, чтобы во всех букетах роз каждого цвета было поровну и все розы были использованы?	Найдите НОД (156; 234; 390)
5	Автомобиль тратит 7,8 л бензина на 100 км пути. Хватит ли 20 л бензина, чтобы доехать от Рязани до Владимира, если расстояние между этими городами составляет 233 км?	Сравните значение выражения $\frac{7{,}8 \cdot 233}{100}$ с числом 20

Цель решения любой задачи – получить верный ответ. Поэтому составление математической модели – это только первый этап решения прикладной задачи.

Решение прикладной задачи состоит из трёх этапов.

1) Построение математической модели.
2) Решение математической задачи.
3) Анализ полученного результата, исходя из содержания прикладной задачи.

Первый этап иллюстрируют приведённые выше примеры. Заметим, что успешная реализация этого шага требует определённых знаний в области, к которой относится данная прикладная задача.

Реализация второго этапа связана с математической деятельностью: нахождение значений выражений, решение уравнений, неравенств и их систем, построение графических объектов и т. п.

На третьем этапе полученный результат надо записать на языке прикладной задачи. Поясним это, обратившись к приведённой таблице. Например, ответы к первой, второй, третьей задачам надо записать так: можно купить 5 кг картофеля; покупку можно осуществить 6 способами; на стоянке было 7 автомобилей. Далее ответ следует проанализировать на соответствие условию прикладной задачи. Например, ответ «1,5 ученика» не может быть приемлемым ни для одной прикладной задачи.

Рассмотрим задачу, в которой уравнение с одной переменной является математической моделью реальной ситуации.

Пример 1. Масса деревянной балки составляет 120 кг, а масса железной балки — 140 кг, причём железная балка на 1 м короче деревянной. Какова длина каждой балки, если масса 1 м железной балки на 5 кг больше массы 1 м деревянной?

Решение. В решении задачи выделим три этапа.

I этап. Построение математической модели.

Пусть длина деревянной балки равна x м, тогда длина железной составляет $(x-1)$ м. Масса 1 м деревянной балки равна $\frac{120}{x}$ кг, а масса 1 м железной — $\frac{140}{x-1}$ кг. Тогда разность $\frac{140}{x-1}-\frac{120}{x}$ показывает, на сколько масса 1 м железной балки больше массы 1 м деревянной балки. По условию задачи эта разность равна 5 кг. Тогда получаем уравнение $\frac{140}{x-1}-\frac{120}{x}=5$. Это уравнение и является математической моделью данной прикладной задачи.

II этап. Решение уравнения.

Имеем:

$$\frac{140}{x-1}-\frac{120}{x}=5;$$

$$\frac{28}{x-1}-\frac{24}{x}=1;$$

$$\begin{cases} 28x-24(x-1)=x^2-x, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x-24=0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$x=8 \text{ или } x=-3.$$

III этап. Анализ результата, полученного на II этапе, исходя из содержания прикладной задачи.

Корень –3 не удовлетворяет условию задачи, поскольку такая величина, как длина, не может выражаться отрицательным числом.

Следовательно, длина деревянной балки равна 8 м, а длина железной – 7 м.

Ответ: 8 м, 7 м. ◄

При оформлении решения задач, подобных той, которую мы рассмотрели в примере 1, необязательно явно выделять три этапа решения прикладной задачи. Важно, чтобы эти этапы были реализованы в процессе решения.

В следующих двух задачах математической моделью реальной ситуации является система двух уравнений с двумя переменными.

Пример 2. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 18 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста и встретились через 2 ч. С какой скоростью шёл каждый турист, если для прохождения всего расстояния между пунктами первому из них нужно на 54 мин больше, чем второму?

Решение. Пусть скорость первого туриста равна x км/ч, а второго – y км/ч, $x < y$. До встречи первый турист прошёл $2x$ км, а второй – $2y$ км. Вместе они прошли 18 км. Тогда $2x + 2y = 18$.

Расстояние между пунктами первый турист проходит за $\frac{18}{x}$ ч, а второй – за $\frac{18}{y}$ ч. Так как первому туристу для прохождения этого расстояния нужно на 54 мин $= \frac{54}{60}$ ч $= \frac{9}{10}$ ч больше, чем второму, то $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9-y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Решив второе уравнение последней системы, получаем: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Корень –36 не подходит по смыслу задачи. Следовательно, $y = 5$, $x = 4$.

Ответ: 4 км/ч, 5 км/ч. ◄

Пример 3. Два работника могут вместе выполнить производственное задание за 10 дней. После 6 дней совместной работы первого из них перевели на другое задание, а второй продолжал работать. Через 2 дня самостоятельной работы второго оказалось, что сделано $\frac{2}{3}$ всего задания. За сколько дней каждый работник может выполнить это производственное задание, работая самостоятельно?

Решение. Пусть первый работник может выполнить всё задание за x дней, а второй – за y дней. За 1 день первый работник выполняет $\frac{1}{x}$ часть задания, а за 10 дней – $\frac{10}{x}$ часть задания. Второй работник за 1 день выполняет $\frac{1}{y}$ часть задания, а за 10 дней – $\frac{10}{y}$ часть задания. Так как за 10 дней совместной работы они выполняют всё задание, то $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Первый работник работал 6 дней и выполнил $\frac{6}{x}$ часть задания, а второй работал 8 дней и выполнил $\frac{8}{y}$ часть задания. Так как в результате было выполнено $\frac{2}{3}$ задания, то $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}$.

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1, \\ \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

решением которой является пара чисел $x = 15$, $y = 30$ (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, первый работник может выполнить задание за 15 дней, а второй – за 30 дней.

Ответ: 15 дней, 30 дней. ◄

1. Что называют математической моделью задачи?
2. Какую задачу называют прикладной?
3. Что называют математическим моделированием?
4. Из каких этапов состоит решение прикладной задачи?

Упражнения

483. Расстояние между сёлами M и N равно 36 км. Из села N выехал велосипедист, а через 0,5 ч навстречу ему из села M выехал второй велосипедист, скорость которого на 6 км/ч больше скорости первого. Найдите скорость каждого велосипедиста, если они встретились на середине пути между сёлами M и N.

484. Масса куска одного металла равна 336 г, а куска другого – 320 г. Объём куска первого металла на 10 см^3 меньше объёма второго, а плотность первого – на 2 г/см^3 больше плотности второго. Найдите плотность каждого металла.

485. Теплоход прошёл по течению реки 100 км и против течения 64 км за 9 ч. За это время он мог пройти 80 км по течению и 80 км против течения. Найдите собственную скорость теплохода.

486. Катер проходит 48 км против течения реки и 30 км по течению реки за 3 ч, а 15 км по течению – на 1 ч быстрее, чем 36 км против течения. Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

487. Два мотоциклиста выехали одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Через час они встретились и, не останавливаясь, продолжили двигаться с той же скоростью. Один из них прибыл в город A на 35 мин раньше, чем второй – в город B. Найдите скорость каждого мотоциклиста, если расстояние между городами составляет 140 км.

488. Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 240 км, выехали одновременно автобус и автомобиль. Автобус прибыл в пункт назначения на 1 ч позже автомобиля. Найдите скорости автомобиля и автобуса, если за 2 ч автобус проезжает на 40 км больше, чем автомобиль за 1 ч.

489. Два автомобиля выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Скорость первого автомобиля 50 км/ч, а второго – 40 км/ч. Через 0,5 ч из того же пункта в том же направлении выехал третий автомобиль, который обогнал первый на 1,5 ч позже, чем второй. Найдите скорость третьего автомобиля.

490. От станции M в направлении станции N, расстояние между которыми равно 450 км, отправился скорый поезд. Через 3 ч после этого от станции N в направлении станции M отправился товарный поезд, который встретился со скорым через 3 ч после своего выхода. Скорый поезд преодолевает расстояние между станциями M и N на 7 ч 30 мин быстрее, чем товарный. Найдите скорость каждого поезда.

491. Турист проплыл на лодке по реке от пристани A до пристани B и вернулся обратно за 6 ч. Найдите скорость течения реки, если 2 км по течению реки турист проплывает за то же время, что и 1 км против течения, а расстояние между пристанями A и B составляет 16 км.

492. Два друга в одной лодке проплыли по реке вдоль берега и вернулись по тому же самому маршруту по реке через 5 ч после момента отплытия. Весь путь составил 10 км. Каждые 2 км против течения они проплывали за то же время, что и каждые 3 км по течению. Найдите скорость течения.

493. Две бригады, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 8 дней. Если первая бригада, работая самостоятельно, выполнит $\frac{1}{3}$ задания, а затем её сменит вторая бригада, то задание будет выполнено за 20 дней. За сколько дней каждая бригада может выполнить данное производственное задание, работая самостоятельно?

494. Если открыть одновременно две трубы, то бассейн будет наполнен за 12 ч. Если сначала наполнять бассейн только через первую трубу в течение 5 ч, а затем только через вторую в течение 9 ч, то водой будет наполнена половина бассейна. За сколько часов может быть наполнен бассейн отдельно через каждую трубу?

495. Два тракториста, работая вместе, могут вспахать поле за 6 ч. Если первый тракторист проработает самостоятельно 4 ч, а затем его сменит второй, то этот тракторист закончит вспашку за 9 ч. За какое время, работая самостоятельно, может вспахать поле каждый тракторист?

496. В двух сплавах массы меди и цинка относятся как 5 : 2 и 3 : 4. Сколько килограммов первого сплава и сколько килограммов второго надо взять, чтобы, переплавив их, получить 28 кг нового сплава с равным содержанием меди и цинка?

497. Есть два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение масс золота и меди равно 1 : 2, а во втором 2 : 3. Если сплавить $\frac{1}{3}$ первого слитка с $\frac{5}{6}$ второго, то в полученном слитке окажется столько золота, сколько было меди в первом слитке, а если сплавить $\frac{2}{3}$ первого слитка и половину второго, то в полученном слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

498. Теплоход проходит путь от пункта A до пункта B за 3 ч, а возвращается назад за 4 ч. За какое время проплывёт путь от пункта A до пункта B плот?

499. Лодка прошла 34 км по течению реки и 39 км против течения, потратив на это столько времени, сколько ей требуется, чтобы проплыть в стоячей воде 75 км. Найдите отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения.

500. Из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста, один из которых прибыл в город B через 40 мин, а другой – в город A через 1,5 ч после встречи. Найдите скорость движения каждого велосипедиста.

501. Из двух пунктов, расстояние между которыми 180 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Первый автомобиль прибыл во второй пункт через 1 ч 36 мин после встречи, а второй автомобиль прибыл в первый пункт через 2,5 ч после встречи. Найдите скорость каждого автомобиля.

502. Расстояние между пристанями A и B равно 28 км. Отчалив от пристани A в направлении пристани B, через 2 ч после начала движения катер встретил плот, отправленный от пристани B по течению реки за 2 ч до начала движения катера. Найдите скорость течения реки и собственную скорость катера, если катер проходит расстояние от пристани A до пристани B и возвращается обратно за 4 ч 48 мин.

503. Из пункта A в пункт B вышел товарный поезд. Через 5 ч из пункта B в пункт A вышел пассажирский поезд. Встретились они в пункте C. От C до B товарный поезд шёл 4 ч, а пассажирский от C до A – 6 ч. За сколько часов каждый поезд может преодолеть путь между A и B?

504. К баку ёмкостью 500 м^3 подведены три трубы. В течение некоторого времени в бак, который сначала был пустым, подавали воду только через первую трубу. Потом первую трубу закрыли и открыли две другие трубы, через которые подавали воду в бак до полного его заполнения. Известно, что вторая и третья трубы были открыты в два раза дольше, чем первая труба. Если бы вторая и третья трубы были открыты 12 ч 30 мин, то через них было подано столько же воды, сколько было подано через первую трубу. Сколько времени была открыта первая труба, если известно, что через неё в бассейн ежеминутно поступало 300 л воды?

505. Пристань A находится выше по течению реки, чем пристань B. От пристаней A и B одновременно навстречу друг другу начали движение плот и моторная лодка. Добравшись до пристани A, лодка немедленно повернула обратно и догнала плот в тот момент времени, когда он проплыл $\frac{2}{3}$ расстояния между пристанями A и B. Найдите время, которое тратит плот на путь от пристани A до пристани B, если известно, что моторная лодка проплывает путь от пристани B до пристани A и обратно за 3 ч.

506. В два одинаковых бассейна одновременно начали наливать воду. В первый бассейн поступает за час на 30 м^3 больше воды, чем во второй. В некоторый момент в обоих бассейнах вместе оказалось столько воды, сколько составляет объём каждого из них. После этого через 2 ч 40 мин наполнился первый бассейн, а ещё через 3 ч 20 мин – второй. Сколько воды поступало за 1 ч в каждый бассейн?

507. В 7 ч утра от первого причала отплыли две лодки. Сначала они плыли 8 км по озеру, а затем 5 км по течению реки до второго причала. Первая лодка приплыла в место назначения не позже 9 ч 50 мин, а вторая – не раньше 10 ч 40 мин того же дня. Чему равна скорость каждой лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а скорость второй лодки в стоячей воде составляет 75 % скорости первой лодки в стоячей воде?

508. Два рабочих изготовили по 60 одинаковых деталей, причём 30 деталей каждый из них сделал, работая с некоторой производительностью, которая у второго рабочего была на 20 % выше, чем у первого. Потом первый рабочий стал изготавливать больше на 2 детали в час, а второй – на 3 детали в час. Первый рабочий потратил на выполнение всего задания не менее 5 ч 30 мин, а второй – не более 4 ч 30 мин. Сколько деталей в час изготавливал второй рабочий во время выполнения первой половины задания?

509. Токарю было поручено изготовить 90 деталей, а ученику – 35. Первые 30 деталей токарь делал с производительностью в два раза большей, чем ученик. Изготовляя остальные 60 деталей, он делал ещё на 2 детали в час больше и закончил свою работу не менее чем на 1 ч позже ученика. Однако если бы токарь первые 30 деталей изготавливал с такой же производительностью, что и остальные 60, то он закончил бы работу не ранее чем через 30 мин после ученика. Сколько деталей в час делал ученик?

510. Бригады рабочих получили со склада одежду для работы: по 2 комплекта на каждого человека. Каждая бригада получила на 20 комплектов больше, чем было бригад. Если бы бригад было на 4 больше и каждой бригаде выдавали бы по 12 комплектов, то одежды на всех не хватило бы. Сколько комплектов одежды было на складе?

511. Солдат, прибывших на парад, планировали выстроить так, чтобы в каждом ряду стояло по 24 солдата. По прибытии оказалось, что не все они смогут участвовать в параде, поэтому их выстроили так, что рядов стало на 2 меньше, чем планировалось, а количество человек в ряду – на 26 больше, чем новое количество рядов. Сколько солдат прибыло на парад, если известно, что если бы все они участвовали в параде, то их можно было бы построить так, чтобы количество рядов было равным количеству человек в ряду?

512. На химическом заводе есть цеха трёх типов. В каждом цехе первого, второго и третьего типов работает соответственно 350, 80 и 60 рабочих. Всего в этих цехах завода работает 980 человек. Найдите количество цехов каждого типа.

Упражнения для повторения

513. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значения переменной (переменных):

1) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a-8}\right)\left(a-4-\frac{16}{a-4}\right)$;

2) $\frac{a}{b-a}-\frac{ac}{b-c}\cdot\left(\frac{b+c}{bc-ac}-\frac{a+b}{ab-a^2}+\frac{b}{ac}\right)$.

514. Решите неравенство:
1) $(3x-2)^2-(3x-1)(2x+3)<3x(x-7)$;
2) $-3x^2-10x+48\le 0$.

515. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{32}$, $\sqrt{30}$, $4\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{54}$, $5\sqrt{2}$.

Готовимся к изучению новой темы

516. Агрофирма владеет 120 га земли, 18 % которой занимает фруктовый сад. Найдите площадь сада.

517. Масса соли составляет 24 % массы раствора. Сколько килограммов раствора надо взять, чтобы он содержал 96 кг соли?

518. Найдите процентное содержание олова в руде, если 40 т этой руды содержат 3,2 т олова.

519. Цена товара выросла с 1200 р. до 1500 р. На сколько процентов повысилась цена?

520. Цена товара снизилась с 1500 р. до 1200 р. На сколько процентов снизилась цена?

521. Цену товара снизили на 10 %, а потом повысили на 25 %. На сколько процентов изменилась первоначальная цена?

Обновите в памяти содержание п. 38–40 на с. 274–275.

§ 15. Процентные расчёты

Вы знакомы с такими типами задач на проценты:
- нахождение процентов от числа;
- нахождение числа по его процентам;
- нахождение процентного отношения двух чисел.

Вы умеете конструировать математические модели этих задач с помощью таких выражений:

1) $\dfrac{a \cdot p}{100}$ – нахождение p % от числа a;

2) $\dfrac{a \cdot 100}{p}$ – нахождение числа, p % которого равны a;

3) $\dfrac{a}{b} \cdot 100\,\%$ – нахождение процентного отношения числа a к числу b.

Банковским работникам, а также тем, кто хранит деньги в банке под проценты, часто приходится решать прикладные задачи, аналогичные той, которая приведена в следующем примере.

Задача. Пусть вкладчик положил в банк 100 000 р. под 10 % годовых. Какая сумма будет на его счёте через 3 года при условии, что вкладчик в течение этого срока не снимает денег со счёта?

Решение. Пусть a_0 – первоначальный капитал вкладчика, т. е.

$$a_0 = 100\ 000 \text{ р.}$$

Обозначим через a_1, a_2, a_3 количество денег на счёте соответственно в конце первого, второго, третьего годов.

В конце первого года первоначальный капитал a_0 вырос на 10 %. Следовательно, число a_1 составляет 110 % от первоначального капитала a_0. Тогда

$$a_1 = a_0 \cdot 1{,}1 = 100\ 000 \cdot 1{,}1 = 110\ 000 \text{ (р.)}.$$

В конце второго года число a_1, в свою очередь, увеличилось на 10 %. Следовательно, число a_2 составляет 110 % от числа a_1. Тогда

$$a_2 = a_1 \cdot 1{,}1 = a_0 \cdot 1{,}1^2 = 100\ 000 \cdot 1{,}1^2 = 121\ 000 \text{ (р.)}.$$

В конце третьего года число a_2 увеличилось на 10 %. Следовательно, число a_3 составляет 110 % от числа a_2. Тогда

$$a_3 = a_2 \cdot 1{,}1 = a_0 \cdot 1{,}1^3 = 100\ 000 \cdot 1{,}1^3 = 133\ 100 \text{ (р.)}.$$

Ответ: 133 100 р.

Аналогично решают эту задачу в общем виде, когда первоначальный капитал, равный a_0, положили в банк под p % годовых.

Действительно, в конце первого года первоначальный капитал увеличится на $\dfrac{a_0 \cdot p}{100}$ и будет равным

$$a_1 = a_0 + \frac{a_0 \cdot p}{100} = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

т. е. увеличится в $\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$ раз.

Кстати, в рассмотренном выше примере это число составляло $1 + \dfrac{10}{100} = 1{,}1.$

Ясно, что в конце второго года сумма снова вырастет в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз и станет равной

$$a_2 = a_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Следовательно, в конце n-го года будем иметь:

$$\boxed{a_n = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

Полученную формулу называют **формулой сложных процентов**.

1. Какие вы знаете три основные задачи на проценты?
2. Какой вид имеет формула сложных процентов?

Упражнения

522. Вкладчик положил в банк 20 000 р. под 6 % годовых. Сколько денег будет на его счёте через год?

523. Вкладчик положил в банк 50 000 р. под 8 % годовых. Сколько денег будет на его счёте через три года?

524. Четыре года назад завод изготавливал 10 000 единиц некоторого изделия в год. Благодаря модернизации производства и повышению продуктивности труда достигли ежегодного прироста объёмов производства на 20 %. Сколько единиц указанного изделия будет изготовлено в этом году?

525. После двух последовательных снижений цены на 10 % канцелярский стол стал стоить 3240 р. Найдите первоначальную цену стола.

526. После двух последовательных повышений цены на 25 % люстра стала стоить 1250 р. Найдите первоначальную цену люстры.

527. Население города за два года увеличилось с 40 000 жителей до 44 100. Найдите средний ежегодный процент прироста населения в этом городе.

528. Вследствие двух последовательных снижений цены на одно и то же количество процентов цена кресла снизилась с 1600 р. до 1156 р. На сколько процентов происходило каждый раз снижение цены?

529. Было 300 г 6-процентного раствора соли. Через некоторое время 50 г воды испарили. Каким стало процентное содержание соли в растворе?

530. К сплаву массой 600 г, содержавшему 12 % серебра, добавили 60 г серебра. Каким стало процентное содержание серебра в новом сплаве?

531. В саду росли яблони и вишни, причём яблони составляли 42 % всех деревьев. Вишен было на 48 деревьев больше, чем яблонь. Сколько деревьев росло в саду?

532. За два дня проложили кабель. В первый день проложили 56 % кабеля, а во второй – на 132 м меньше, чем в первый. Сколько всего метров кабеля проложили за два дня?

533. В первый день мальчик прочитал 25 % всей книги, во второй – 72 % от оставшегося количества страниц, а в третий – остальные 84 страницы. Сколько страниц в книге?

534. В магазин завезли три вида мороженого: шоколадное, клубничное и ванильное. Шоколадное составляло 45 % массы всего мороженого, клубничное – 40 % массы шоколадного, а ванильное – остальные 111 кг. Сколько всего килограммов мороженого завезли в магазин?

535. Морская вода содержит 5 % соли. Сколько пресной воды надо добавить к 40 кг морской воды, чтобы концентрация соли составила 2 %?

536. (*Задача Безу*[1].) Некто купил коня и через некоторое время продал его за 24 пистоля. При продаже он потерял столько процентов, сколько стоил ему конь. Спрашивается: за какую сумму он купил коня?

537. Фирма покупает у производителя товар по оптовой цене, а продаёт в розницу по 11 р., при этом прибыль от продажи в процентах равна оптовой цене товара в рублях. Какова оптовая цена товара?

538. На старом станке рабочий изготавливал одну деталь за 20 мин, а на новом – за 8 мин. На сколько процентов выросла производительность труда рабочего?

539. Внедрение новых технологий позволило уменьшить время на изготовление одной детали с 12 мин до 10 мин. На сколько процентов будет выполняться при этом план, если норму времени не изменят?

540. Смешали 30-процентный раствор соляной кислоты с 10-процентным раствором и получили 800 г 15-процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора взяли для этого?

541. В первом бидоне находится молоко, в котором массовая часть жира составляет 2 %, а во втором – молоко с массовой частью жира 5 %. Сколько надо взять килограммов молока из каждого бидона, чтобы получить 18 кг молока, массовая часть жира в котором равна 3 %?

---

[1] Этьен Безу (1730–1783) – французский математик, основные работы которого лежат в области высшей алгебры. Преподавал математику в училище гардемаринов, Королевском артиллерийском корпусе. Автор шеститомного труда «Курс математики».

542. Одеяло стоило 600 р. После того как цена была снижена дважды, оно стало стоить 432 р., причём процент снижения во второй раз был в 2 раза больше, чем в первый. На сколько процентов каждый раз снижалась цена?

543. Некоторый товар стоил 200 р. Сначала его цену повысили на несколько процентов, а потом снизили на столько же процентов, после чего его стоимость стала 192 р. На сколько процентов каждый раз происходило изменение цены товара?

544. Вкладчик положил в банк 40 000 р. За первый год ему начислили некоторый процент годовых, а во второй год банковский процент был увеличен на 4 %. В конце второго года на счёте оказалось 46 640 р. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

545. Вкладчик положил в банк 10 000 р. За первый год ему начислили некоторый процент годовых, а во второй год банковский процент был уменьшен на 2 %. В конце второго года на счёте оказалось 11 880 р. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

546. К сплаву меди и цинка, содержавшему меди на 12 кг больше, чем цинка, добавили 6 кг меди. Вследствие этого процентное содержание цинка в сплаве снизилось на 5 единиц. Сколько килограммов цинка и сколько килограммов меди содержал сплав первоначально?

547. К сплаву магния и алюминия, содержавшему 12 кг алюминия, добавили 5 кг магния, после чего процентное содержание магния в сплаве увеличилось на 20 единиц. Сколько килограммов магния было в сплаве первоначально?

548. В цистерне находилась концентрированная серная кислота, содержавшая 2 т воды. После того как эту кислоту смешали с 4 т воды, концентрация её снизилась на 15 %. Сколько тонн кислоты было в цистерне первоначально?

549. Чтобы получить соляную кислоту, 2 кг хлористого водорода растворили в некотором объёме воды. Потом, чтобы повысить концентрацию полученной кислоты на 25 %, добавили ещё 9 кг хлористого водорода. Сколько килограммов соляной кислоты было получено?

550. В ёмкости было 12 кг кислоты. Часть кислоты отлили и долили до предыдущего уровня водой. Потом снова отлили столько же, сколько и в первый раз, и долили водой до предыдущего уровня. Сколько килограммов жидкости отливали каждый раз, если в результате получили 25-процентный раствор кислоты?

Упражнения для повторения

551. Известно, что $-3 \le a \le 2$, $-1 \le b \le 3$. Оцените значение выражения:
1) $3a + 4b$; 2) $4a - 3b$.
Сколько целых значений принимает каждое из этих выражений?

552. При каких значениях c трёхчлен $2x^2 - 2x + 5c$ принимает положительные значения при любом значении x?

553. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + xy - y = 13, \\ x - y = 3. \end{cases}$

Учимся делать нестандартные шаги

554. Каждая школа района делегировала трёх своих учеников для участия в олимпиаде. Андрей, Пётр и Елена представляли лицей «Лидер». Перед началом олимпиады всех участников выстроили в шеренгу и последовательно выдали номера участников. Андрей заметил, что после него в шеренге стоит столько же участников, сколько до него. Кроме того, Пётр и Елена оказались стоящими после Андрея и получили номера участников 19 и 28 соответственно. Сколько школ в этом районе?

§ 16. Абсолютная и относительная погрешности

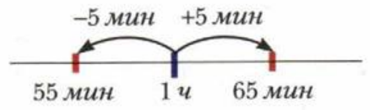
Каково население Дальневосточного федерального округа? Сколько книг находится в школьных библиотеках России? Сколько серн живёт в Тебердинском заповеднике?

Ясно, что дать ответы на эти вопросы можно только приближённо. Приближённые значения величин получаются не только при подсчёте большого и постоянно изменяющегося количества объектов. Они также возникают при различных измерениях, например длины, скорости, силы тока и т. д. Изучая математику, вы встречались с приближёнными значениями, округляя действительные числа, находя десятичные приближения обыкновенной дроби, решая графически уравнения и системы уравнений.

На практике важно знать, насколько может приближённое значение величины отличаться от её точного значения.

Например, если мастерская обещает, что выполнит ваш заказ за один час **с точностью до** 5 мин, то это означает, что время выполнения вашего заказа является приближённой величиной, содержащейся в промежутке от 55 до 65 мин (рис. 83).

Рис. 83



Если точное время выполнения заказа обозначить буквой t, то пишут $t = 60 \pm \pm 5$ мин. Читают: «t равно 60 минут с точностью до 5 минут». Эта запись означает, что точное время t (в минутах) может отличаться от приближённого значения, равного 60 мин, не более чем на 5 мин:

$$60 - 5 \le t \le 60 + 5;$$
$$55 \le t \le 65.$$

Пусть a – приближённое значение с точностью до h величины, точное значение которой равно x. Тогда $x = a \pm h$. Отсюда

$$a - h \le x \le a + h;$$
$$-h \le x - a \le h;$$
$$|x - a| \le h.$$

Определение

Абсолютной погрешностью приближения называют модуль разности между точным значением величины x и её приближённым значением a.

Итак, величина $|x - a|$ – это абсолютная погрешность.

Из сказанного выше следует, что если a – приближённое значение x с точностью до h, т. е. $x = a \pm h$, то абсолютная погрешность приближения не превосходит h, т. е. $|x - a| \le h$. Другими словами, максимальное отклонение приближённого значения от точного значения не превосходит h.

Например, из курса алгебры 8 класса вы знаете, что число 1,414 является приближённым значением числа $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001. Это означает, что $\left|\sqrt{2} - 1{,}414\right| \le 0{,}001$.

На уроках физики и химии вам, наверное, приходилось пользоваться таблицами, в которых указаны приближённые значения той или иной величины. Эти таблицы составлены так, что по записи приближённого значения можно судить о точности приближения.

Например, в таблице плотностей металлов указано приближённое значение плотности ρ платины: 21,45 г/см^3. Последняя цифра в записи этого числа принадлежит разряду сотых. Это означает, что приближённое значение плотности платины указано с точностью до 0,01 г/см^3, т. е. $\rho = 21{,}45 \pm 0{,}01$ г/см^3.

Итак, *если в справочной литературе приближённое значение записано в виде десятичной дроби, то точность приближения не превосходит единицу последнего разряда.*

Нередко в справочниках приближённые значения величин записывают в стандартном виде, т. е. в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$, n – целое число. По записи множителя a можно оценить точность приближения.

Например, если в справочнике указано, что масса m Солнца равна $1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг, то это означает, что

$$m = (1{,}99 \pm 0{,}01) \cdot 10^{30} \text{ кг} = 1{,}99 \cdot 10^{30} \pm 10^{-2} \cdot 10^{30} \text{ кг} = \\ = 1{,}99 \cdot 10^{30} \pm 10^{28} \text{ кг}.$$

Следовательно, масса Солнца указана с точностью до 10^{28} кг.

Число 10^{28} огромное, и может показаться, что измерение массы Солнца выполнено недостаточно хорошо. Чтобы оценить качество этого измерения, рассмотрим следующий пример.

Пусть вам поручили купить 1 кг свёклы. Скорее всего, вы будете довольны, если продавец будет пользоваться весами, позволяющими взвешивать товар с точностью до 10 г, т. е. с точностью до 0,01 кг.

Величина 0,01 кг ничтожно мала по сравнению с 10^{28} кг. Однако 0,01 составляет бо́льшую часть от 1 кг, чем 10^{28} кг от $1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

Действительно, $\dfrac{10^{28}}{1{,}99 \cdot 10^{30}} = \dfrac{1}{199} \approx 0{,}005$; $\dfrac{0{,}01}{1} = 0{,}01$.

Таким образом, можно сделать вывод, что масса Солнца измерена более качественно, чем масса свёклы.

Говорят, что первое измерение получено с **относительной погрешностью** до $\dfrac{1}{199}$, второе – с относительной погрешностью до 0,01.

Определение

Относительной погрешностью называют отношение абсолютной погрешности к модулю приближённого значения величины.

Итак, $\dfrac{|x-a|}{|a|}$ – относительная погрешность.

Как правило, относительную погрешность выражают в процентах. В нашем примере масса Солнца приведена с относительной погрешностью, приблизительно равной 0,5 %.

1. Что называют абсолютной погрешностью?

2. Что называют относительной погрешностью?

Упражнения

555. Какие из следующих величин являются точными, а какие приближёнными:

1) объём воды в озере Байкал составляет 23 000 км^3;
2) в классе 32 ученика;
3) в Государственной Думе России 450 депутатов;
4) в самолёте Ил-96-400 436 посадочных мест;
5) урожай составил 36 ц с одного гектара;
6) высота горы Эверест равна 8848 м?

556. Прочитайте предложения, используя слова «с точностью до...»:

1) интервал движения поездов метро составляет 50 ± 5 с;
2) длина рулона линолеума равна $15 \pm 0{,}05$ м;
3) температура воздуха в комнате равна $22 \pm 0{,}5$ °C.

557. Что означает запись:

1) $x = 12{,}6 \pm 0{,}2$ м;
2) $x = 23 \pm 1$ мм;
3) $x = 25 \pm 0{,}5$ °C;
4) $x = 9{,}8 \pm 0{,}1$ м/с^2?

558. Запишите в виде двойного неравенства:

1) $x = 15 \pm 0{,}3$;   2) $x = \frac{4}{5} \pm \frac{1}{3}$;   3) $x = 3{,}8 \pm 1$.

559. Запишите в виде двойного неравенства:

1) $x = 36{,}6 \pm 0{,}1$;   2) $x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{6}$;   3) $x = -7 \pm 0{,}2$.

560. Известно, что $x = 7{,}9 \pm 0{,}3$. Может ли точное значение величины x быть равным:

1) 8;   2) 7;   3) 7,5;   4) 7,6;   5) 8,2?

561. Известно, что $x = 8{,}7 \pm 0{,}2$. Может ли точное значение величины x быть равным:

1) 8;   2) 9;   3) 8,9;   4) 8,6?

562. Найдите абсолютную погрешность приближения числа 9,806 числом:

1) 9;   2) 9,8;   3) 9,81;   4) 10.

563. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{1}{3}$ числом:

1) 0,3;   2) 0,4;   3) 0,33.

564. Известно, что $x = 7{,}7 \pm 0{,}3$. Может ли абсолютная погрешность приближения быть равной:

1) 0,3;   2) 0,31;   3) 0,1?

565. В справочнике указано, что плотность меди равна 8,96 г/см^3. С какой точностью указано приближённое значение плотности меди?

566. В справочнике указано, что плотность азота равна 1,2505 кг/см^3. С какой точностью указано приближённое значение плотности азота?

567. В справочнике указано, что масса атома алюминия равна $4{,}48 \cdot 10^{-26}$ кг. С какой точностью указано приближённое значение массы атома алюминия?

568. В справочнике указано, что расстояние от Солнца до Венеры равно $1{,}082 \cdot 10^8$ км. С какой точностью указано расстояние от Солнца до Венеры?

569. В справочнике указано, что масса атома гелия равна $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг. Оцените относительную погрешность этого приближения.

570. В справочнике указано, что запасы вольфрама в минеральных ресурсах мира составляют $1{,}3 \cdot 10^6$ т. Оцените относительную погрешность этого приближения.

571. В отделе технического контроля завода измеряется диаметр вала с точностью до 0,1 мм. По таблице допусков диаметр d вала должен удовлетворять требованию $189{,}9 \le d \le 190{,}3$. Будет ли забракован вал, если в результате измерения его диаметр оказался равным 190,2 мм?

Упражнения для повторения

572. При каких значениях b и c вершина параболы $y = 4x^2 + bx + c$ находится в точке $A(3; 2)$?

573. Тракторист должен был за определённое время вспахать поле площадью 180 га. Однако ежедневно он вспахивал на 2 га больше, чем планировал, и закончил работу на 1 день раньше срока. За сколько дней тракторист вспахал поле?

574. Постройте график функции $y = \dfrac{5x - 15}{3x - x^2}$.

575. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{9 - 8x - x^2} + \dfrac{x + 3}{x^2 - 2x}$; 2) $y = \sqrt{6x - x^2} + \dfrac{3}{\sqrt{x - 3}}$.

§ 17. Основные правила комбинаторики

Сколькими способами ученики вашего класса могут стать друг за другом в очереди в буфет? Сколькими способами можно выбрать в вашем классе старосту и его заместителя? Сколькими способами могут распределиться золотые, серебряные и бронзовые медали на чемпионате мира по футболу?

Отвечая на эти вопросы, надо подсчитать, сколько различных комбинаций, образованных по определённому правилу, можно составить из элементов данного конечного множества. Область математики, которая занимается решением подобных задач, называют **комбинаторикой**.

В основе решения большинства комбинаторных задач лежат два правила: правило суммы и правило произведения.

Рассмотрим такой пример. Туриста заинтересовали 5 маршрутов в Карелии и 7 маршрутов на Кавказе. Выясним, сколькими способами он может организовать свой отпуск, имея время только на один маршрут.

Поскольку всего имеется $5 + 7 = 12$ различных маршрутов, то один из них можно выбрать 12 способами.

Обобщением этого примера является следующее правило.

Правило суммы

Если множество A состоит из m элементов, а множество B — из k элементов, причём эти множества не имеют общих элементов, то выбор «a или b», где $a \in A$, $b \in B$, можно осуществить $m + k$ способами.

Правило суммы можно обобщить для трёх и более множеств. Например, если множества A, B и C состоят соответственно из m, k и n элементов, причём ни у каких двух из этих множеств нет общих элементов, то выбор «a или b или c», где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, можно осуществить $m + k + n$ способами.

Обратимся снова к примеру с выбором маршрутов. Если у туриста есть время на два маршрута и он хочет побывать сначала в Карелии, а затем на Кавказе, то он может организовать свой отдых 35 способами. Действительно, если выбрать один маршрут в Карелии, то парой к нему может быть любой из семи кавказских маршрутов. Так как маршрутов в Карелии пять, то количество пар (маршрут в Карелии; маршрут на Кавказе) равно $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Эти соображения иллюстрирует следующая таблица.

		Кавказские маршруты						
		1	2	3	4	5	6	7
Карельские маршруты	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Обобщением этого примера является такое правило.

Правило произведения

Если элемент a можно выбрать m способами и после каждого такого выбора элемент b можно выбрать k способами[1], то выбор «a и b» в указанном порядке можно осуществить mk способами.

Правило произведения также естественно обобщить. Например, если элемент a можно выбрать m способами, после каждого такого выбора элемент b можно выбрать k способами и после того, как выбраны элементы a и b, элемент c можно выбрать n способами, то выбор «a и b и c» можно осуществить mkn способами.

Пример 1. Из класса, в котором учатся 28 человек, надо выбрать трёх дежурных по одному на каждый из трёх этажей школы. Каким количеством способов это можно сделать?

Решение. Существует 28 способов выбрать дежурного по первому этажу. После того как этот выбор будет сделан, останется 27 учеников, каждый из которых может стать дежурным по второму этажу. После выбора дежурных для первого и второго этажей дежурного по третьему этажу можно выбрать 26 способами.

Таким образом, по правилу произведения количество способов выбора трёх дежурных равно $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$.

Ответ: 19 656 способов. ◄

Пример 2. Сколько натуральных делителей имеет число 2000?

Решение. Имеем: $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Тогда любой делитель данного числа имеет вид $2^m \cdot 5^k$, где m и k – целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \leq m \leq 4$, $0 \leq k \leq 3$. Количество делителей данного числа равно количеству наборов, которые можно составить из чисел m и k в указанном порядке. Число m можно выбрать 5 способами, число k – 4 способами. Следовательно, по правилу произведения такой набор можно выбрать $5 \cdot 4 = 20$ способами. Поэтому число 2000 имеет 20 делителей. ◄

Пример 3. Для защиты информации на компьютере используют пароль – последовательность букв и цифр длиной от трёх до пяти символов (пароль может содержать несколько одинаковых символов). Сколько различных паролей можно придумать, используя 26 строчных букв английского алфавита и 10 цифр?

[1] Будем называть это свойство принципом независимости количества выборов.

Решение. Найдём количество разных паролей, состоящих из трёх символов. В качестве первого символа можно выбрать любую букву или любую цифру. Получаем 36 вариантов выбора первого символа. Аналогично для второго и третьего символов существует по 36 вариантов выбора. Применяя правило умножения, получаем, что существует 36^3 разных паролей длиной в три символа.

Аналогично доказываем, что количество паролей, состоящих из четырёх символов, равно 36^4, а паролей из пяти символов — 36^5.

Применяя правило суммы, получаем, что общее число паролей равно $36^3 + 36^4 + 36^5$. ◄

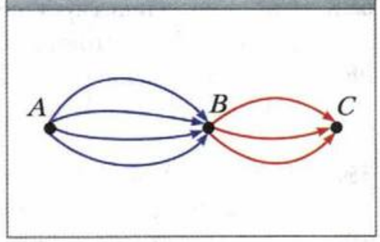
1. Сформулируйте правило суммы.

2. Сформулируйте правило произведения.

Упражнения

576. Из города A в город B ведут 4 дороги, а из города B в город C ведут 3 дороги (рис. 84). Сколькими способами можно проехать из города A в город C?

Рис. 84



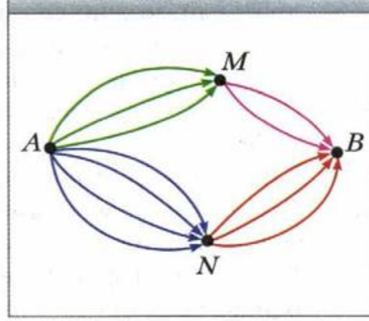
577. Кафе предлагает в меню 3 первых блюда, 6 вторых блюд и 5 третьих блюд. Сколько существует способов выбрать обед из трёх блюд (по одному блюду каждого вида)?

578. Будем рассматривать слоги из двух букв, первая из которых является согласной, а вторая — гласной. Сколько таких различных слогов можно составить из букв слова:

1) весна; 2) косоворотка?

579. В корзине лежат 10 яблок и 7 груш. Антон выбирает яблоко или грушу. После этого Максим выбирает яблоко и грушу. В каком случае у Максима больше возможностей для выбора: когда Антон взял яблоко или когда Антон взял грушу?

Рис. 85



580. На рисунке 85 показана схема дорог, ведущих из города A в город B. Сколькими способами можно проехать из города A в город B?

581. Кафе предлагает в меню 3 различных салата, 6 различных мясных блюд и 5 различных десертов. Сколько существует способов выбрать ужин из двух блюд разного вида?

582. На вершину горы ведёт 5 маршрутов. Сколькими способами альпинист может подняться на гору и спуститься с неё? Ответьте на этот вопрос также при условии, что подъём и спуск должны проходить по разным маршрутам.

583. Сколько пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если эти числа должны начинаться:
1) с цифры 1; 2) с записи «34»?

584. Сколько четырёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

585. Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых нечётные?

586. Сколько четырёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

587. Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых чётные?

588. Сколько существует семизначных телефонных номеров, которые не начинаются с цифры 0?

589. В школе 20 классов и 20 классных руководителей. Сколькими способами можно распределить классное руководство между учителями?

590. Монету подбрасывают 4 раза. Сколько различных последовательностей гербов и чисел можно получить?

591. Игральный кубик бросают 3 раза. Сколько различных последовательностей очков можно получить?

592. Сколько трёхзначных чётных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

593. Сколько трёхзначных нечётных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

594. Сколько пятизначных чисел, все цифры которых должны быть различными, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

595. Сколько чётных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы в каждом числе цифры были различными?

596. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся нацело на 5?

597. Сколько существует семизначных чисел, которые делятся нацело на 25?

598. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две ладьи так, чтобы они не били друг друга?

599. Сколько существует семизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

600. Сколькими способами можно распределить заказ на печать 10 различных учебников между двумя типографиями?

Упражнения для повторения

601. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2 - x$. С помощью графиков укажите значения x, при которых значение функции $y = \sqrt{x}$ больше, чем значение функции $y = 2 - x$.

602. Одному рабочему для выполнения производственного задания надо на 4 ч меньше, чем другому. Первый рабочий проработал 2 ч, а потом его сменил второй. После того как второй рабочий проработал 3 ч, оказалось, что выполнена $\frac{1}{2}$ задания. За сколько часов может выполнить это задание каждый рабочий, работая самостоятельно?

603. Докажите, что функция:

1) $f(x) = x^2 + 4x$ убывает на промежутке $(-\infty; -2]$;

2) $f(x) = \frac{9}{4 + x}$ убывает на промежутке $(-\infty; -4)$.

604. Постройте график функции:

1) $y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3} - \frac{x^2 - 1}{x + 1}$;   2) $y = \frac{5x^2 + 4x - 1}{x + 1} - \frac{x^2 - 3x}{x}$.

Учимся делать нестандартные шаги

605. Существуют ли такие натуральные x и y, что $x^4 - y^4 = x^3 + y^3$?

§ 18. Частота и вероятность случайного события

Нам нередко приходится проводить наблюдения, опыты, участвовать в экспериментах или испытаниях. Часто подобные исследования заканчиваются некоторым результатом (исходом), который заранее предсказать нельзя.

Рассмотрим несколько характерных примеров.

- Если открыть книгу наугад, то невозможно знать заранее, какой номер страницы вы увидите.
- Нельзя до начала футбольного матча определить, с каким счётом закончится игра.
- Вы не можете быть уверены в том, что, когда нажмёте на кнопку выключателя, загорится настольная лампа.

• Нет гарантии, что из куриного яйца, помещённого в инкубатор, вылупится цыплёнок.

Как правило, наблюдения или эксперимент определяются каким-то комплексом условий. Например, футбольный матч должен проходить по правилам; куриные яйца должны находиться в инкубаторе не менее 21 дня при определённой методике изменения температуры и влажности воздуха.

Результат наблюдения, опыта, эксперимента будем называть **событием.**

Случайным событием называют такой результат наблюдения или эксперимента, который при соблюдении данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

Например, при подбрасывании монеты случайным событием является выпадение числа. Обнаружение письма при проверке почтового ящика также является случайным событием.

Представим, что выпущен 1 000 000 лотерейных билетов и разыгрывается один автомобиль. Можно ли, приобретя один лотерейный билет, выиграть этот приз? Конечно, можно, хотя это событие *маловероятно*. А если будут разыгрываться 10 автомобилей? Ясно, что **вероятность** выигрыша увеличится. Если же представить, что разыгрываются 999 999 автомобилей, то вероятность выигрыша станет намного большей.

Следовательно, **вероятности случайных событий** можно сравнивать. Однако для этого следует договориться, каким образом количественно оценивать возможность появления того или иного события.

Основанием для такой количественной оценки могут быть результаты многочисленных наблюдений или экспериментов. Так, люди давно заметили, что многие события происходят с той или иной, на удивление постоянной, **частотой**.

Демографам[1] хорошо известно число 0,512. Статистические данные, полученные в разные времена и в разных странах, свидетельствуют о том, что на 1000 новорождённых приходится в среднем 512 мальчиков. Число 0,512 называют **частотой случайного события** «рождение мальчика». Оно определяется формулой:

$$\text{Частота} = \frac{\text{Количество новорождённых мальчиков}}{\text{Количество всех новорождённых}}.$$

Подчеркнём, что это число получено в результате анализа многих наблюдений. В таких случаях говорят, что вероятность события «рождение мальчика» приблизительно равна 0,512.

Вы знаете, что курение вредно для здоровья. По данным организаций охраны здоровья, курильщики составляют приблизительно 92 % от всех

[1] Демография — наука о народонаселении.

больных раком лёгких. Число 0,92 – это частота случайного события «тот, кто заболел раком лёгких, – курил», которая определяется таким отношением:

$$\text{Частота} = \frac{\text{Количество курильщиков среди заболевших раком лёгких}}{\text{Количество всех людей, заболевших раком лёгких}}.$$

В таких случаях говорят, что вероятность встретить курильщика среди тех, кто заболел раком лёгких, приблизительно равна 0,92 (или 92 %).

Чтобы детальнее ознакомиться с понятием вероятности случайного события, обратимся к классическому примеру с подбрасыванием монеты.

Предположим, что в результате двух подбрасываний монеты дважды выпал герб. Тогда в данной серии, состоящей из двух испытаний, частота выпадения герба равна:

$$\text{Частота} = \frac{\text{Количество выпадений герба}}{\text{Количество бросков}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Означает ли это, что вероятность выпадения герба равна 1? Конечно нет.

Для того чтобы по частоте случайного события можно было оценивать его вероятность, количество испытаний должно быть достаточно большим.

Начиная с XVIII в. многие исследователи проводили серии испытаний с подбрасыванием монеты.

В таблице приведены результаты некоторых таких испытаний.

Исследователь	Количество подбрасываний монеты	Количество выпадений герба	Частота выпадения герба
Жорж Бюффон (1707–1788)	4040	2048	0,5069
Огастес де Морган (1806–1871)	4092	2048	0,5005
Уильям Джевонс (1835–1882)	20 480	10 379	0,5068
Всеволод Романовский (1879–1954)	80 640	39 699	0,4923
Карл Пирсон (1857–1936)	24 000	12 012	0,5005
Уильям Феллер (1906–1970)	10 000	4979	0,4979

По приведённым данным прослеживается закономерность: при многократном подбрасывании монеты частота выпадения герба незначительно отклоняется от числа 0,5.

Следовательно, можно считать, что вероятность случайного события «выпадение герба» приблизительно равна 0,5.

В каждом из рассмотренных примеров использовалось понятие **частота случайного события**. Эту величину мы вычисляли по формуле:

$$\text{Частота} = \frac{\text{Количество появлений интересующего события}}{\text{Количество испытаний (наблюдений)}}.$$

Вновь обратимся к таблице, расположенной выше. Можно ли на основании приведённых данных исследователей гарантированно утверждать, что вероятность случайного события «выпадение герба» равна числу 0,5? Ответ на этот вопрос отрицателен. Действительно, на основании этих данных можно сказать, что частота выпадения герба незначительно отклоняется от числа 0,502 или от числа 0,4997, т. е. число 0,5 не имеет никакого преимущества перед числом 0,502 или числом 0,4997.

Таким образом, частота случайного события позволяет лишь приближённо оценить вероятность случайного события. ***Чем больше испытаний провести, тем точнее будет оценка вероятности случайного события по его частоте.***

Такую оценку вероятности случайного события называют **статистической**. Её используют в разных областях деятельности человека: физике, химии, биологии, страховом бизнесе, социологии, экономике, здравоохранении, спорте и т. д.

Вероятность случайного события обозначают буквой P (первой буквой французского слова *probabilité* — «вероятность»).

Если в первом примере событие «рождение мальчика» обозначить букной A, то полученный результат записывают так:

$$P(A) \approx 0{,}512.$$

Учитывая приближённый характер статистической оценки, полученные данные можно округлить. Например, когда частота случайного события равна 0,512, то можно написать, что $P(A) \approx 0{,}51$ или $P(A) \approx 0{,}5$.

Если событие «выпадение герба» обозначить буквой B, то

$$P(B) \approx 0{,}5.$$

Нередко в повседневной жизни мы принимаем верные и оптимальные решения, используя вероятностные свойства окружающих явлений или объектов.

Приведём несколько примеров.

- Если вы хотите узнать, как решать задачу из домашнего задания, то, скорее всего, позвоните однокласснику, который хорошо знает математику. Этот выбор основан на том, что вероятность решить задачу сильным учеником больше, чем вероятность решить эту же задачу слабым учеником.

• Товары популярных фирм стоят дороже аналогичных товаров малоизвестных фирм. Однако нередко мы покупаем более дорогой товар. Такое решение во многом определяется тем, что вероятность купить некачественное изделие у известной фирмы меньше, чем у малоизвестной фирмы.

• Пусть контрольная работа состоит из десяти заданий в тестовой форме с выбором ответа. Предположим, что вы справились с девятью задачами, а десятую решить не можете. Остаётся лишь одно – ответ угадывать. Скорее всего, вы не станете выбирать букву, обозначающую вариант ответа, которая в предыдущих девяти заданиях встречалась чаще других. Эти соображения основаны на том, что составители тестовых заданий вряд ли расположили варианты ответов так, чтобы какая-то буква, обозначающая правильный ответ, встречалась гораздо чаще других.

Подчеркнём, что отдельно взятый выбор, основанный на вероятностной оценке, может оказаться неудачным. Несмотря на это, при принятии следующих аналогичных решений не следует отступать от выбранной стратегии руководствоваться вероятностными характеристиками, поскольку такой подход увеличивает шансы на успех.

1. Приведите примеры случайных событий.
2. Опишите, что такое частота случайного события.
3. При каких условиях частота случайного события может оценивать вероятность случайного события?
4. Как обозначают вероятность события A?

Упражнения

606. Приведите примеры экспериментов, результатом которых, на ваш взгляд, является: 1) маловероятное событие; 2) очень вероятное событие.

607. Можно ли считать маловероятным событие:
1) при подбрасывании монеты 200 раз подряд выпал герб;
2) на следующей неделе вас вызовут к доске хотя бы один раз;
3) в матче ЦСКА – «Рубин» (Казань) зафиксирован результат 1 : 1;
4) нажимая наугад клавиши клавиатуры компьютера, получили слово «математика»?

Приведите примеры реальных ситуаций, в которых принятие решения определяется вероятностными характеристиками окружающих явлений.

608. Эксперимент состоит в бросании кнопки. Кнопка может упасть как остриём вниз, так и на шляпку (рис. 86). Подбросьте кнопку: 1) 10 раз; 2) 20 раз; 3) 50 раз; 4) 100 раз. Результаты, полученные в четырёх сериях эксперимента, занесите в таблицу.

Рис. 86

Номер серии	1	2	3	4
Количество экспериментов (бросков) в серии	10	20	50	100
Количество выпадений кнопки остриём вниз				
Количество выпадений кнопки остриём вверх				

В каждой из четырёх серий эксперимента подсчитайте частоту выпадения кнопки остриём вверх и оцените вероятность этого события. Какое событие более вероятно: «кнопка упадёт остриём вниз» или «кнопка упадёт остриём вверх»?

609. Эксперимент состоит в бросании двух монет. Проведите этот эксперимент: 1) 10 раз; 2) 20 раз; 3) 50 раз; 4) 150 раз. Результаты, полученные в каждой из четырёх серий эксперимента, занесите в таблицу.

Номер серии	1	2	3	4
Количество экспериментов (бросков) в серии	10	20	50	150
Количество экспериментов, в которых выпало два герба				
Количество экспериментов, в которых выпал ровно один герб				
Количество экспериментов, в которых не выпало ни одного герба				

В каждой из четырёх серий эксперимента подсчитайте частоту случайного события:

1) выпадение двух гербов;

2) выпадение только одного герба;

3) выпадение двух чисел.

Можно ли на основании этих наблюдений предположить, что событие «выпал ровно один герб» более вероятно, чем событие «не выпало ни одного герба»? На чём основано такое предположение? Можно ли на основании этих наблюдений гарантировать, что первое из названных событий более вероятно, чем второе?

610. Проведите серию, состоящую из 100 экспериментов, в которых подбрасывают пуговицу с петлёй (рис. 87). Найдите частоту события «пуговица упадёт петлёй вниз». Оцените вероятность события «пуговица упадёт петлёй вверх» в проведённой серии экспериментов.

Рис. 87

611. В таблице приведены данные о рождении детей в городе N за 2013 г.

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Количество рождений мальчиков	1198	1053	1220	1151	1151	1279
Количество рождений девочек	1193	1065	1137	1063	1163	1228

Месяц	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Количество рождений мальчиков	1338	1347	1329	1287	1196	1243
Количество рождений девочек	1258	1335	1218	1239	1066	1120

Подсчитайте частоту рождений мальчиков в каждом месяце и за весь 2013 г. Оцените вероятность рождения девочек в 2013 г.

612. Оператор справочной службы в течение рабочего дня (9:00–17:00) разговаривает по телефону в среднем 6 ч. Оцените вероятность того, что, если позвонить в справочную в это время, телефон окажется свободным.

613. 1) Из большой партии лампочек выбрали 1000, среди которых оказалось 5 бракованных. Оцените вероятность купить бракованную лампочку.

2) Известно, что холодильники, выпускаемые фирмами A и B, имеют одинаковые технические характеристики и продаются по одинаковой цене. Из больших партий выбрали 500 холодильников фирмы A и 800 холодильников фирмы B. В первой партии оказалось 3 бракованных холодильника, а во второй партии – 5. Холодильник какой из фирм купили бы вы?

614. Во время эпидемии гриппа среди обследованных 40 000 жителей выявили 7900 больных. Оцените вероятность события «наугад выбранный житель болен гриппом».

615. Вероятность купить бракованную батарейку равна 0,02. Верно ли, что в любой партии из 100 батареек есть две бракованные?

616. Вероятность попасть в мишень составляет 85 %. Может ли быть так, что в серии из 100 выстрелов было 98 попаданий в мишень?

617. Приведённую таблицу называют «Учебный план для 9 класса общеобразовательных организаций Российской Федерации».

Предмет	Количество часов в неделю
Русский язык	2
Русская литература	3
Иностранный язык	3
История	2
Обществознание	1
Алгебра	3
Геометрия	2
Информатика	2
Биология	2
География	2
Физика	2
Химия	2
Технология и ИКТ	1
Музыка и ИЗО	1
Физкультура	2

Оцените вероятность того, что выбранный наугад урок в недельном расписании 9 класса окажется: 1) алгеброй; 2) геометрией; 3) математикой; 4) физкультурой; 5) иностранным языком.

618. Выберите наугад одну страницу из романа М.Ю. Лермонтова «Герой нашего времени». Подсчитайте, сколько на этой странице окажется букв «н», «о», «я», «ю», а также сколько всего на ней букв. Оцените вероятность появления этих букв в выбранном тексте. Эта оценка позволит понять, почему на клавиатурах пишущей машинки и компьютера (рис. 88) буквы «н» и «о» расположены ближе к центру, а буквы «я» и «ю» — ближе к краю.

Рис. 88

619. В таблице приведены данные о количестве дней 2009 г., в которые на 12.00 были зафиксированы данная температура и данный уровень влажности воздуха в г. Белгороде.

Диапазон температуры воздуха, °С	Диапазон влажности воздуха, %						Всего дней
	от 0 до 40	от 41 до 60	от 61 до 70	от 71 до 80	от 81 до 90	от 91 до 100	
Менее –11 °С	0	1	1	3	2	0	7
От –10 до –1 °С	0	0	11	15	13	5	44
От 0 до 10 °С	10	19	12	13	19	47	120
От 11 до 20 °С	23	27	15	6	10	2	83
От 21 до 30 °С	57	32	6	2	1	0	98
Более 31 °С	9	4	0	0	0	0	13
Всего дней	99	83	45	39	45	54	365

Подсчитайте частоту наблюдения в 2009 г.:

1) температуры воздуха в диапазоне от 11 до 20 °C среди тех дней, когда зафиксированная влажность была не более 40 %;

2) влажности воздуха в диапазоне от 71 до 80 % среди тех дней, когда зафиксированная температура была ниже 0 °C;

3) температуры воздуха в диапазоне от 21 до 30 °C и одновременно влажности воздуха в диапазоне от 41 до 70 %.

Упражнения для повторения

620. Решите неравенство $(|x| + 1)(x^2 + 5x - 6) > 0$.

621. Упростите выражение:

1) $10\sqrt{\frac{2}{5}} - 0{,}5\sqrt{160} + 3\sqrt{1\frac{1}{9}}$; 2) $9\sqrt{2\frac{1}{3}} - 8\sqrt{1\frac{5}{16}} + \sqrt{189}$.

622. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2 - 6x < 14, \\ (x-2)^2 > (x+4)(x-4) + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2 - (3 - x) \le 5 - 3(x - 5), \\ 7 - 2(x - 3) > 1 - (2x + 5). \end{cases}$

623. Решите графически уравнение:

1) $x^2 + 2 = -\frac{3}{x}$; 2) $x^2 - 2x - 6 = \sqrt{x}$.

624. Известно, что $a + 3b = 10$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $a^2 + b^2$ и при каких значениях a и b?

§ 19. Классическое определение вероятности

Для нахождения вероятности некоторых событий необязательно проводить испытания или наблюдения. Достаточно руководствоваться жизненным опытом и здравым смыслом.

Пример 1. Пусть в коробке лежат 10 красных шаров. Какова вероятность того, что взятый наугад шар будет красного цвета? Жёлтого цвета?

Решение. При заданных условиях любой взятый наугад шар будет красного цвета.

Событие, которое при данном комплексе условий обязательно состоится при любом испытании, называют **достоверным**.

Вероятность такого события считают равной 1, т. е.:
если A – достоверное событие, то

$$P(A) = 1.$$

Итак, вероятность того, что взятый наугад шар будет красного цвета, равна 1.

Поскольку в коробке нет шаров жёлтого цвета, то взять шар жёлтого цвета нельзя.

Событие, которое при данном комплексе условий не может состояться ни при каком испытании, называют **невозможным**.

Вероятность такого события считают равной 0, т. е.:

если A – невозможное событие, то

$$P(A) = 0.$$

Итак, вероятность того, что взятый наугад шар будет жёлтого цвета, равна 0.

Ответ: 1, 0. ◄

Пример 2. Однородную монету подбрасывают один раз. Какова вероятность выпадения герба?

Решение. В этом эксперименте можно получить только один из двух результатов (исходов): выпадение числа или выпадение герба. Причём ни один из них не имеет преимуществ. Такие результаты называют **равновозможными**, а соответствующие случайные события – **равновероятными**. Тогда считают, что вероятность каждого из событий «выпадение герба» и «выпадение числа» равна $\frac{1}{2}$.

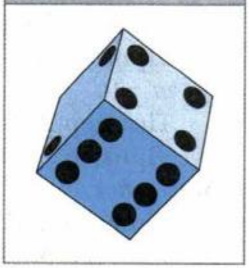
Сказанное не означает, что в любой серии экспериментов с подбрасыванием монеты ровно половиной результатов будет выпадение герба и ровно половиной – выпадение числа. Мы можем лишь прогнозировать, что при большом количестве испытаний частота выпадения герба приблизительно равна $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$. ◄

Рассмотрим ещё несколько примеров экспериментов с таким комплексом условий, который делает все их результаты равновозможными.

Пример 3. Игральный кубик (рис. 89) бросают один раз. Какова вероятность выпадения цифры 4?

Рис. 89



Решение. В этом эксперименте можно получить один из шести результатов: выпадет 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Все эти результаты равновозможные. Поэтому считают, что вероятность события «выпадение 4 очков» равна $\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$. ◄

Пример 4. Пусть выпущено 100 000 лотерейных билетов, 20 из которых являются выигрышными. Какова вероятность выигрыша при покупке одного билета?

Решение. Испытание состоит в том, что покупают один билет. В этом эксперименте можно получить один из 100 000 равновозможных результатов: купить билет с номером 1, купить билет с номером 2 и т. д. Из них 20 результатов приводят к выигрышу. Поэтому считают, что вероятность выигрыша при покупке одного билета равна $\frac{20}{100\,000} = \frac{1}{5000}$.

Ответ: $\frac{1}{5000}$. ◄

Пример 5. Пусть в коробке лежат 15 бильярдных шаров, пронумерованных числами от 1 до 15. Какова вероятность того, что вынутый наугад шар будет иметь номер, кратный 3?

Решение. В этом испытании можно получить один из 15 равновозможных результатов: вынуть шар с номером 1, вынуть шар с номером 2 и т. д. Из них наступлению события «вынутый шар имеет номер, кратный 3» способствуют 5 результатов: вынутый шар имеет номер 3, или 6, или 9, или 12, или 15. Поэтому считают, что искомая вероятность равна $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$. ◄

Несмотря на то что в примерах 1–5 рассматривались разные эксперименты, их описывает одна математическая модель. Поясним сказанное.

- В каждом примере исходом испытания является один из n равновозможных результатов.

Пример 1: $n = 10$.

Пример 2: $n = 2$.

Пример 3: $n = 6$.

Пример 4: $n = 100\,000$.

Пример 5: $n = 15$.

- В каждом примере рассматривается некоторое событие A, к наступлению которого приводят m результатов. Будем называть их **благоприятными**.

Пример 1: A – вынули красный шар, $m = 10$, или A – вынули жёлтый шар, $m = 0$.

Пример 2: A – выпал герб, $m = 1$.

Пример 3: A – выпало заранее заданное количество очков на грани кубика, $m = 1$.

Пример 4: A – выигрыш приза, $m = 20$.

Пример 5: A – вынули шар, номер которого кратен 3, $m = 5$.

• В каждом примере вероятность события A можно вычислить по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Определение

Если испытание может закончиться одним из n равновозможных результатов, из которых m приводят к наступлению события A, то вероятностью события A называют отношение $\frac{m}{n}$.

Такое определение вероятности называют **классическим**.

Подчеркнём: *если комплекс условий эксперимента таков, что его результаты не являются равновозможными, то классическое определение вероятности к такому эксперименту применять нельзя.*

Пример 6. Бросают одновременно два игральных кубика: синий и жёлтый. Какова вероятность того, что выпадут две шестёрки?

Решение. С помощью таблицы, изображённой на рисунке 90, мы можем установить, что в данном эксперименте можно получить 36 равновозможных результатов, из которых благоприятным является только один. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{36}$.

Ответ: $\frac{1}{36}$. ◄

Рис. 90

Пример 7 (задача Д'Аламбера). Подбрасывают одновременно две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

Решение. Эта задача похожа на задачу из примера 6. Разница лишь в том, что кубики различались по цвету, а монеты неразличимы. Чтобы создать в данном эксперименте комплекс условий, при которых все его результаты станут равновозможными, будем различать монеты, предварительно их пронумеровав. Тогда можно получить четыре равновозможных результата (рис. 91).

Рис. 91

В первых трёх из этих результатов хотя бы один раз появился герб. Эти результаты являются благоприятными. Поэтому вероятность того, что при одновременном подбрасывании двух монет хотя бы один раз появится герб, равна $\frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$. ◄

Пример 8. Рассматриваются все семьи с двумя детьми, в которых по крайней мере один ребёнок – мальчик. Какова вероятность того, что в выбранной наугад такой семье два мальчика? (Считаем, что рождение мальчика и рождение девочки равновероятны.)

Решение. Казалось бы, в этой задаче ответом является число $\frac{1}{2}$. Ведь один мальчик в семье уже есть, а значит, вторым ребёнком с равной вероятностью будет либо мальчик, либо девочка.

На самом деле приведённые рассуждения – это решение другой задачи: рассматриваются все семьи с двумя детьми, в которых старший ребёнок – мальчик. Какова вероятность того, что в выбранной наугад такой семье два мальчика?

Комплекс условий нашего эксперимента даёт такие три равновозможных результата:

старший ребёнок – мальчик, младший ребёнок – мальчик;
старший ребёнок – мальчик, младший ребёнок – девочка;
старший ребёнок – девочка, младший ребёнок – мальчик.

Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$. ◄

__Пример 9.__ В двух урнах лежат шары, которые различаются только цветом. В первой урне лежат два белых и три чёрных шара, а во второй – три белых и два чёрных шара. Из каждой урны наугад достают по одному шару. Какова вероятность того, что хотя бы один из двух шаров окажется белым?

Решение. Этот опыт имеет три результата: оба вытянутых шара белые, или оба чёрные, или один шар белый, а другой – чёрный. Однако эти результаты не являются равновозможными. Для того чтобы рассматривать опыт с равновозможными результатами, пронумеруем все 10 шаров.

Так как в каждой урне лежит по 5 шаров, то из них можно составить $5 \cdot 5 = 25$ таких пар, шары в которых взяты из разных урн. Так как шары пронумерованы, то мы можем считать, что все 25 пар шаров различны. Шары из урн берут наугад. Поэтому в данном эксперименте есть 25 равновозможных результатов.

Поскольку в первой урне лежат 3 чёрных шара, а во второй – 2 чёрных, то существует $3 \cdot 2 = 6$ пар шаров чёрного цвета. Поэтому количество пар шаров, среди которых есть хотя бы один белый, равно $25 - 6 = 19$. Значит, количество результатов, благоприятных для события «хотя бы один из шаров окажется белым» (событие A), равно 19.

Следовательно, $P(A) = \frac{19}{25}$.

Ответ: $\frac{19}{25}$. ◄

В завершение этого параграфа отметим следующее.

На первый взгляд кажется, что многими явлениями, происходящими вокруг нас, управляет «его величество случай». Однако при более основательном анализе выясняется, что через хаос случайностей прокладывает себе дорогу закономерность, которую можно количественно оценить. Науку, которая занимается такими оценками, называют **теорией вероятностей**.

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?
3. Какова вероятность: 1) достоверного события; 2) невозможного события?
4. Приведите примеры равновероятных событий.
5. Сформулируйте классическое определение вероятности.

Упражнения

625. Приведите примеры достоверных событий.

626. Приведите примеры невозможных событий.

627. В корзинке лежат 10 красных и 15 зелёных яблок. Какова вероятность взять наугад из корзинки грушу? Яблоко?

628. Наугад выбирают три чётные цифры. Какова вероятность того, что число, записанное этими цифрами, будет нечётным?

629. Наугад выбирают три нечётные цифры. Какова вероятность того, что число, записанное этими цифрами, будет нечётным?

630. Какова вероятность того, что, переставив буквы в слове «алгебра», мы получим слово «геометрия»?

631. Приведите примеры событий с равновозможными результатами.

632. Приведите примеры событий с неравновозможными результатами.

633. Равновероятны ли события A и B:

1) событие A: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с номером 1;
событие B: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с номером 7;

2) событие A: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с чётным номером;
событие B: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с нечётным номером?

634. Какова вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет количество очков, равное:

1) одному;
2) трём;
3) чётному числу;
4) числу, кратному 5;
5) числу, которое не делится нацело на 3;
6) числу, кратному 7?

635. Представь себе, что в классе, в котором ты учишься, разыгрывается одна бесплатная туристическая путёвка в Лондон. Какова вероятность того, что в Лондон поедешь ты?

636. Чтобы сдать зачёт по математике, надо выучить 35 билетов. Студент выучил безупречно 30 билетов. Какова вероятность того, что, отвечая на один наугад вытянутый билет, он получит оценку 5 баллов?

637. Чтобы сдать зачёт по математике, надо выучить 30 билетов. Студент не выучил только один билет. Какова вероятность того, что он не сдаст зачёт, отвечая на один билет?

638. Какова вероятность того, что имя ученицы вашего класса, которую вызовут к доске на уроке алгебры, — Екатерина?

639. В классе учится 12 девочек и 17 мальчиков. Один учащийся опоздал в школу. Все ученики имеют равные вероятности опоздать в школу. Какова вероятность того, что это:

1) был мальчик; 2) была девочка?

640. В лотерее 20 выигрышных билетов и 280 билетов без выигрыша. Какова вероятность выиграть, купив один билет?

641. В коробке лежат 7 синих и 5 жёлтых шаров. Какова вероятность того, что выбранный наугад шар окажется: 1) жёлтым; 2) синим?

642. В коробке лежат 23 карточки, пронумерованные от 1 до 23. Из коробки наугад взяли одну карточку. Какова вероятность того, что на ней записано число:

1) 12;
2) 24;
3) чётное;
4) нечётное;
5) кратное 3;
6) кратное 7;
7) двузначное;
8) простое;
9) в записи которого есть цифра 9;
10) в записи которого есть цифра 1;
11) в записи которого отсутствует цифра 5;
12) сумма цифр которого делится нацело на 5;
13) которое при делении на 7 даёт в остатке 5;
14) в записи которого отсутствует цифра 1?

643. Из натуральных чисел от 1 до 30 наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что это число будет:

1) простым;
2) делителем числа 18;
3) квадратом натурального числа?

644. Набирая номер телефона своего товарища, Николай забыл:

1) последнюю цифру;
2) первую цифру. Какова вероятность того, что он с первой попытки наберёт правильный номер?

645. Какова вероятность того, что твой самый счастливый день в следующем году попадёт на:

1) 7-е число; 2) 31-е число; 3) 29-е число?

646. Грани кубика раскрашены в красный или белый цвет (каждая грань в один цвет). Вероятность выпадения красной грани равна $\frac{5}{6}$. Сколько красных и сколько белых граней у кубика?

647. Грани кубика раскрашены в два цвета — синий и жёлтый (каждая грань в один цвет). Вероятность того, что выпадет синяя грань, равна $\frac{2}{3}$. Сколько синих и сколько жёлтых граней у кубика?

648. В коробке лежат 2 синих шара и несколько красных. Сколько красных шаров в коробке, если вероятность того, что выбранный наугад шар:

1) окажется синим, равна $\frac{2}{5}$;

2) окажется красным, равна $\frac{4}{5}$?

649. Карточки с номерами 1, 2, 3 произвольным образом разложили в ряд. Какова вероятность того, что карточки с нечётными номерами окажутся рядом?

650. На скамейку произвольным образом садятся два мальчика и одна девочка. Какова вероятность того, что мальчики окажутся рядом?

651. В коробке лежат 5 зелёных и 7 синих карандашей. Какое наименьшее количество карандашей надо вынуть наугад, чтобы вероятность того, что среди вынутых карандашей хотя бы один будет зелёного цвета, была равной 1?

652. В коробке лежат 3 красных, 7 жёлтых и 11 синих карандашей. Какое наименьшее количество карандашей надо вынуть наугад, чтобы вероятность того, что среди вынутых карандашей хотя бы один будет красного цвета, была равной 1?

653. Бросают одновременно два игральных кубика. С помощью рисунка 90 установите, какова вероятность того, что выпадут:

1) две единицы;
2) два одинаковых числа;
3) числа, сумма которых равна 7;
4) числа, сумма которых больше 10;
5) числа, произведение которых равно 6.

654. Бросают одновременно две монеты. Какова вероятность того, что выпадут:

1) два герба; 2) герб и число?

655. Какова вероятность того, что при трёх подбрасываниях монеты:

1) трижды выпадет герб;
2) дважды выпадет герб;
3) один раз выпадет герб;
4) хотя бы один раз выпадет герб?

656. Какова вероятность того, что при двух бросках игрального кубика:

1) в первый раз выпадет число, которое меньше 5, а во второй – больше 4;
2) шестёрка выпадет только во второй раз;
3) в первый раз выпадет больше очков, чем во второй?

657. Десять карточек пронумерованы натуральными числами от 1 до 10. Наугад выбирают две из них. Какова вероятность того, что произведение номеров выбранных карточек будет нечётным числом?

658. Десять карточек пронумерованы натуральными числами от 1 до 10. Наугад выбирают две из них. Какова вероятность того, что сумма номеров выбранных карточек будет нечётным числом?

659. Эксперимент состоит в одновременном бросании четырёх игральных кубиков. Найдите вероятность того, что выпадут три шестёрки и одна пятёрка.

660. Эксперимент состоит в одновременном бросании четырёх игральных кубиков. Найдите вероятность того, что выпадут четыре одинаковые цифры.

Упражнения для повторения

661. Упростите выражение

$$\left(\frac{9a^2}{a^3+64}-\frac{a+4}{a^2-4a+16}\right):\frac{8a+8}{a^2-4a+16}+\frac{a+10}{a+4}.$$

662. Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\sqrt{3-5x-2x^2}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-5x-2x^2}}$;

3) $f(x)=\sqrt{3-5x-2x^2}+\dfrac{1}{x^2-9}$;

4) $f(x)=\sqrt{3-5x-2x^2}+\dfrac{2}{x^2+2x}$.

663. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{6}{x}+2$;

2) $y=-\dfrac{8}{x}-3$;

3) $y=\dfrac{4}{x-3}$;

4) $y=-\dfrac{6}{x+2}$.

Учимся делать нестандартные шаги

664. Решите уравнение

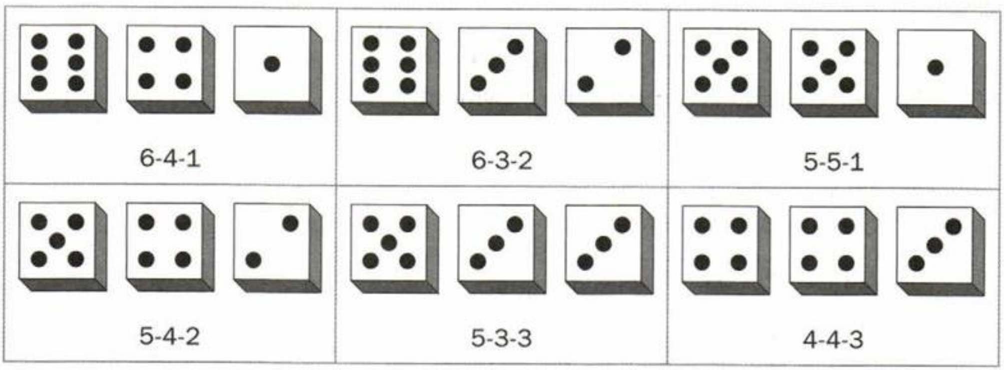
$$c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x.$$

Сначала была игра

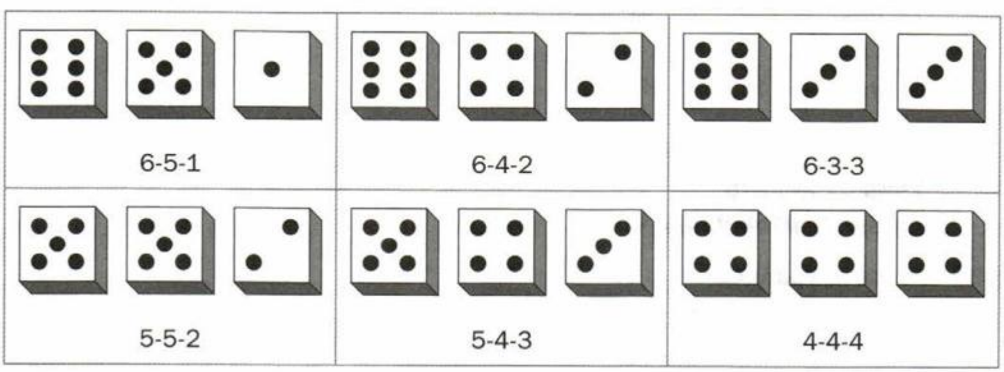
Вы знаете много игр, в которых результат зависит от мастерства участников. Однако есть и такие игры, в которых от умения игроков ничего не зависит. Всё решает случай. К последним принадлежит и игра в кости. Считают, что именно с неё началась наука о случайном.

Придворный французского короля Людовика XIV, азартный игрок, философ и литератор кавалер де Мере обратился к выдающемуся учёному Блезу Паскалю с просьбой разъяснить такой парадокс. С одной стороны, богатый игровой опыт де Мере свидетельствовал, что при бросании трёх игральных костей сумма в 11 очков выпадает чаще, чем в 12 очков.

С другой стороны, этот факт вступал в противоречие с такими соображениями. Сумму в 11 очков можно получить из шести разных комбинаций кубиков:



Но и 12 очков также можно получить из шести комбинаций:



Следовательно, к появлению в сумме 11 и 12 очков приводит одинаковое количество благоприятных результатов. Таким образом, эти события имеют одинаковые шансы, что противоречит практике.

Блез Паскаль
(1623–1662)

Французский религиозный философ, писатель, математик и физик. В раннем возрасте проявил математические способности, вошёл в историю науки как классический пример подростковой гениальности. Круг его математических интересов был необычайно широк. В частности, он изобрёл общий алгоритм для нахождения признаков делимости любых целых чисел, сформулировал ряд основных положений теории вероятностей, методы вычисления площадей фигур, площадей поверхностей и объёмов тел. Сконструировал первую вычислительную машину — сумматор.

Паскаль понял: ошибка состояла в том, что де Мере описал опыт, результаты которого не являются равновозможными. Например, сумму в 11 очков с помощью комбинации 6-4-1 можно получить при шести разных результатах бросания кубиков: (6; 4; 1); (6; 1; 4); (4; 6; 1); (4; 1; 6); (1; 6; 4); (1; 4; 6).

Если подсчитать для каждой комбинации количество способов её появления, то будем иметь: для суммы 11 количество благоприятных результатов равно 27, а для суммы 12 — 25. Причём все такие результаты являются равновозможными.

Эту и другие задачи, связанные с азартными играми, Б. Паскаль обсуждал в переписке с Пьером Ферма (1601–1665). Считают, что в этой переписке были заложены основы теории вероятностей.

Интересно, что ошибку, подобную той, которую допустил де Мере, сделал выдающийся французский математик Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783). Решая задачу: «Монету подбрасывают дважды. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?», он рассуждал примерно так.

Возможны три результата: герб выпал на первой монете, герб выпал на второй монете, герб вообще не выпал. Тогда из трёх возможных результатов благоприятными являются только два, т. е. вероятность равна $\frac{2}{3}$. Однако из примера 7 § 19 вы знаете, что верным является ответ $\frac{3}{4}$.

Ошибка состояла в том, что указанные три результата не являются равновозможными (подумайте почему). Скорее всего, эта ошибка свидетельствует о том, что в XVIII в. теория вероятностей была ещё «молодой» наукой, требовавшей уточнения самого понятия «вероятность события».

Становление и развитие теории вероятностей связаны с трудами таких выдающихся учёных, как Якоб Бернулли (1654–1705), Пьер Лаплас (1749–1827), Рихард Мизес (1883–1953). В XX в. особое значение приобрели работы выдающегося советского математика Андрея Николаевича Колмогорова (1903–1987). А.Н. Колмогоров – академик АН СССР, иностранный член многих зарубежных академий, лауреат Ленинской, а также ряда престижных математических премий (П.Л. Чебышёва, Н.И. Лобачевского, Больцана, Вольфа). Андрей Николаевич значительную часть своих творческих сил посвящал педагогической деятельности. Он много работал с одарённой молодёжью, был одним из руководителей первых московских олимпиад и школьного математического кружка при МГУ. Многие поколения школьников нашей страны учились по учебникам А.Н. Колмогорова.

§ 20. Начальные сведения о статистике

Каким тиражом следует выпустить учебник по алгебре для 9 класса?

Стоит ли определённому политику выдвигать свою кандидатуру на очередных выборах мэра?

Сколько килограммов рыбы и морепродуктов потребляет в среднем за год один житель России?

Выгодно ли для концерта данного артиста арендовать стадион?

На эти и многие другие вопросы помогает отвечать статистика.

Определение

Статистика (от лат. *status* — «состояние») — это наука о сборе, обработке и анализе количественных данных, которые характеризуют массовые явления.

Статистическое исследование состоит из нескольких этапов.

Сбор данных

↓

Обработка данных и их представление в удобной форме

↓

Анализ данных

↓

Выводы и рекомендации

Остановимся отдельно на каждом этапе.

Сбор данных

Вы знаете, что вредные привычки, неправильное питание, малоподвижный образ жизни приводят к сердечно-сосудистым заболеваниям. К такому выводу врачи пришли, исследовав, конечно, не всех людей планеты.

Понятно, что исследование носило *выборочный*, но ***массовый*** характер.

В статистике совокупность объектов, на основании которых проводят исследование, называют **выборкой.**

В данном примере выборка состояла из нескольких миллионов человек.

Следует отметить, что статистический вывод, основанный лишь на численности выборки, не всегда достоверен. Например, если мы, исследуя популярность артиста, ограничимся опросом людей, пришедших на его концерт, то полученные выводы не будут объективными, ведь эти люди пришли на концерт именно потому, что этот артист им нравится. Статистики говорят, что выборка должна быть **репрезентативной** (от франц. *représentatif* — «показательный»).

Одним из условий формирования репрезентативной выборки является случайный выбор её элементов. При этом должна быть обеспечена одинаковая вероятность попадания в выборку любого объекта из множества исследуемых. Так, врачи, изучая факторы риска возникновения сердечно-сосудистых заболеваний, исследовали людей разного возраста, профессий, национальностей и т. д., подбирая элементы выборки случайным образом.

Следовательно, *сбор данных должен основываться на массовости и репрезентативности выборки.* Иногда выборка может совпадать с множеством всех объектов, исследование которых проводится. Тогда её называют **генеральной совокупностью.** Примером такого исследования является проведение Единого государственного экзамена по математике для выпускников 11 классов.

Способы представления данных

Собранную информацию (совокупность данных) удобно представлять в виде таблиц, графиков, диаграмм.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В таблице представлены результаты выступлений российских школьников на международных математических олимпиадах в течение 1995–2012 гг.

Год	Место проведения	Количество медалей		
		Золотые	Серебряные	Бронзовые
1995	Канада	4	2	0
1996	Индия	2	3	1
1997	Аргентина	3	2	1
1998	Тайвань	2	3	1
1999	Румыния	4	2	0
2000	Южная Корея	5	1	0
2001	США	5	1	0
2002	Великобритания	6	0	0
2003	Япония	3	2	1
2004	Греция	4	1	1
2005	Мексика	4	2	0
2006	Словения	3	3	0
2007	Вьетнам	5	1	0
2008	Испания	6	0	0
2009	Германия	5	1	0
2010	Казахстан	4	2	0
2011	Нидерланды	2	4	0
2012	Аргентина	4	2	0

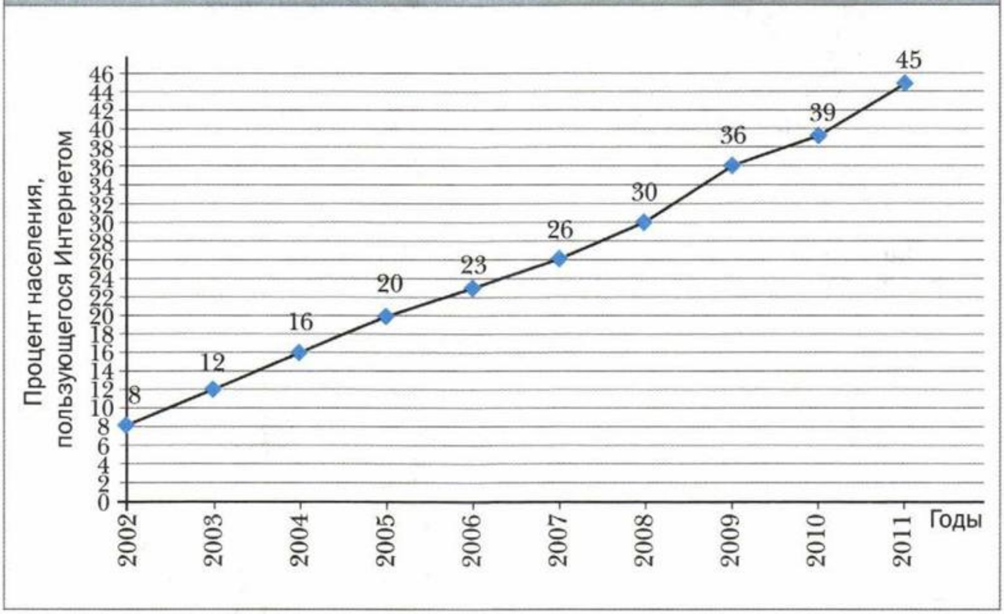
Примечание. Команда участников на международных математических олимпиадах состоит не более чем из 6 человек.

Во многих случаях данные удобно представлять в виде **столбчатой диаграммы**, которую ещё называют **гистограммой** (от греч. *histos* – «столб» и *gramma* – «написание»). Такая информация легко воспринимается и хорошо запоминается.

Информацию также можно представлять в виде графиков.

Пример 2. На рисунке 92 изображён график ежегодного процентного роста количества пользователей Интернета в России в течение 2002–2011 гг.

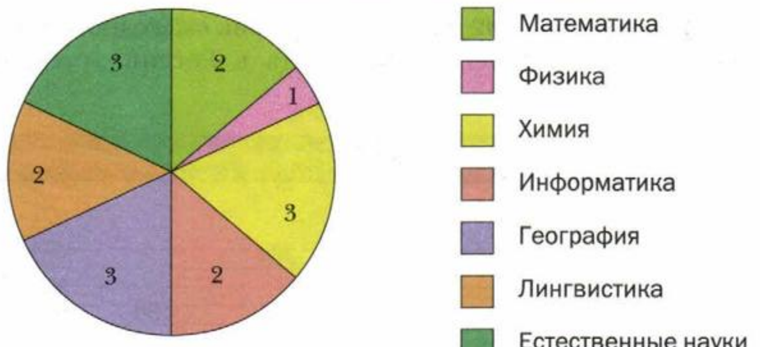
Рис. 92



Столбчатые диаграммы и графики обычно используют тогда, когда хотят продемонстрировать, как с течением времени изменяется некоторая величина.

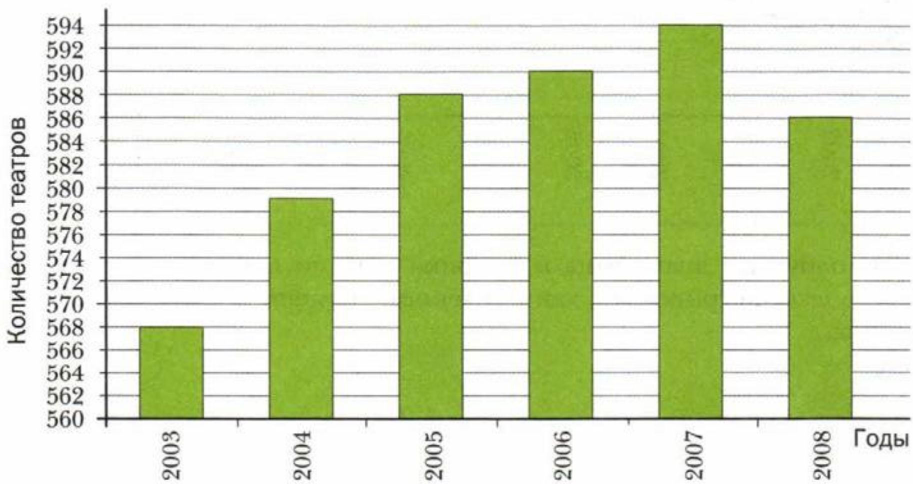
Пример 3. На рисунке 93 приведено распределение золотых медалей, завоёванных российскими школьниками на международных олимпиадах по математике, физике, химии, информатике, географии, лингвистике, естественным наукам в 2011 г. Для этого использована **круговая диаграмма**: круг представляет общее количество медалей, а каждому предмету соответствует некоторый сектор круга.

Рис. 93



Пример 4. На рисунке 94 представлена информация о количестве профессиональных театров в России (период с 2003 по 2008 г.).

Рис. 94



Анализ данных, выводы и рекомендации

Статистические сведения поступают из разных областей знаний и деятельности человека: экономики, медицины, социологии, демографии, сельского хозяйства, метеорологии, спорта и т. д. Однако статистические методы обработки (анализа) данных, несмотря на разнообразие областей применения, имеют много общего. Ознакомимся с некоторыми из них.

Обратимся к примеру 1. Приведённая таблица позволяет узнать, сколько в среднем золотых медалей в год завоёвывали школьники России на международных математических олимпиадах. Для этого надо количество всех золотых медалей, полученных на протяжении рассматриваемого периода, разделить на количество лет. Например, за период 2000–2012 гг. имеем:

$$\frac{5+5+6+3+4+4+3+5+6+5+4+2+4}{13} = \frac{56}{13} \approx 4{,}31.$$

Так как за год можно завоевать не более 6 медалей, то среднее значение 4,31 свидетельствует о том, что команда России выступает на этом престижном форуме с большим успехом.

В статистической информации средние значения полученной совокупности данных встречаются довольно часто. Например, приведём таблицу потребления мяса в России (в килограммах на человека в год).

Наименование продукта	Год			
	2007	2008	2009	2010
Говядина и телятина	17,3	18,6	16,8	16,6
Свинина	17,9	19,8	19,2	19,9
Мясо бройлеров	18,6	20,1	21,2	21,0

Такую таблицу могут использовать экономисты и диетологи в своих исследованиях, выводах и рекомендациях, крупные производители и поставщики сельхозпродукции при планировании своей деятельности.

Однако среднее значение не всегда точно (адекватно) отображает ситуацию. Например, если в стране доходы разных слоёв населения очень различаются, то средний доход на одного человека для большинства жителей может не отображать их материальное состояние.

Допустим, в какой-то стране 100 жителей – очень богатые, а остальные 5 млн – очень бедные. Тогда показатель среднего дохода может оказаться не низким, а следовательно, не будет адекватно отображать общую бедность населения.

В подобных случаях для анализа данных используют другие характеристики.

С помощью примера 1 составим таблицу, отображающую количество медалей каждого вида, завоёванных российскими школьниками на международных математических олимпиадах в течение 1995–2012 гг.

Золотые медали	Серебряные медали	Бронзовые медали
71	32	5

Такую таблицу называют **частотной**, а числа, записанные во второй строке, — **частотами**.

Частота 71 показывает, что российские школьники чаще всего завоёвывали золотые медали. Показатель «золотые медали» называют **модой** полученных данных.

Это слово всем хорошо знакомо. Мы часто говорим «войти в моду», «выйти из моды», «дань моде». В повседневной жизни мода означает совокупность взглядов и привычек, которым большинство отдаёт предпочтение в данный момент времени.

Именно мода является важнейшей характеристикой тогда, когда полученная совокупность данных не является числовым множеством. Продемонстрируем это на таком примере.

Одна фирма, планирующая поставлять джинсы в Россию, провела опрос репрезентативной выборки, состоящей из 500 человек. В результате получили такую частотную таблицу.

Размер джинсов	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Частота	61	104	111	108	64	43	9
Относительная частота, %	12,2	20,8	22,2	21,6	12,8	8,6	1,8

В третьей строке этой таблицы записано отношение соответствующей частоты к величине выборки. Это отношение, записанное в процентах, называют **относительной частотой**. Например, для размера XS имеем: $\frac{61}{500} \cdot 100 = 12{,}2$ (%).

Мода данной выборки – это размер M, и ей соответствует относительная частота 22,2 %.

Тем самым фирма получила информацию, что наибольшую часть объёмов поставок (около 22 %) должны составлять джинсы размера M.

Заметим, что если бы в таблице две частоты были равны и принимали наибольшие значения, то модой являлись бы два соответствующих размера.

Для выработки стратегии своей деятельности фирме важно знать не только моду выборки, но и «сконцентрированность» других данных вокруг моды. Так, в нашем примере частоты, соответствующие размерам S и L, не сильно (по сравнению с другими) отличаются от частоты размера M.

Если эта информация не будет учтена, то фирма может понести убытки от нераспроданных джинсов неходовых размеров или создать дефицит ходовых размеров.

Выше мы привели пример, когда среднее значение неточно отображает материальное состояние людей в стране. Более полную характеристику можно получить, если среднее значение дополнить результатом такого исследования.

Формируют репрезентативную выборку, состоящую из жителей данной страны, и получают совокупность данных, составленную из доходов. Далее в соответствии со шкалой, определяющей уровень доходов (низкий, средний, высокий), разбивают полученный ряд данных на три группы. Составляют таблицу, в которую вносят значения частот и относительных частот.

Уровень доходов	Низкий	Средний	Высокий
Частота	m	n	k
Относительная частота, %	p	q	r

Мода такой совокупности данных может характеризовать уровень доходов в стране.

Исследование совокупности данных можно сравнить с работой врача, ставящего диагноз. В зависимости от жалоб пациента или видимых симптомов врач выбирает определённую методику поиска причины болезни. Понятно, что методы исследования определяют точность диагноза. Так и в статистике: в зависимости от собранной информации и способа её получения применяют различные методы её обработки. Эти методы могут дополнять друг друга, какой-то из них может более точно (адекватно), чем другие, отражать конкретную ситуацию. Так, анализируя выступления российских школьников на международных математических олимпиадах, можно установить, что статистические характеристики – среднее значение и мода – удачно сочетаются. А в примере, определяющем ходовой размер джинсов, наиболее приемлем поиск моды.

Чем богаче арсенал методик обработки данных, тем более объективный вывод можно получить.

Познакомимся ещё с одной важной статистической характеристикой.

Семья, приняв решение сделать ремонт на кухне, интересуется, сколько стоит положить один квадратный метр керамической плитки. Изучив прейскуранты 11 строительных фирм, получили такую информацию (цены записаны в рублях в порядке возрастания):

$$270,\ 280,\ 300,\ 300,\ 310,\ 350,\ 540,\ 550,\ 860,\ 890,\ 1400.$$

Заметим, что полученный ряд данных имеет большой **размах**, т. е. большую разность между наибольшим и наименьшим значениями данной выборки. Он равен 1130 р.

Семья хочет выбрать фирму со средними ценами.

Среднее значение полученной совокупности данных равно 550 р.

Однако полученные данные показывают, что цену 550 р. скорее можно отнести к высоким, чем к средним.

Обратим внимание на число, которое стоит посередине записанной упорядоченной совокупности данных. Это число 350. Его называют **медианой** этой выборки. В такой ситуации именно медиана помогает выбрать фирму со средними ценами. Действительно, в последовательности из 11 чисел есть пять меньших, чем 350, и пять бóльших, чем 350.

Теперь рассмотрим упорядоченную совокупность данных, состоящую из чётного количества чисел, например из восьми:

$$1,\ 4,\ 4,\ 7,\ 8,\ 15,\ 24,\ 24.$$

Здесь «серединой» выборки являются сразу два числа: 7 и 8. Считают, что медиана такой выборки равна их среднему арифметическому $\frac{7+8}{2} = 7{,}5$.

Среднее значение, моду и медиану называют **мерами центральной тенденции** полученной совокупности данных.

1. Какую науку называют статистикой?
2. Из каких этапов состоит статистическое исследование?
3. Что в статистике называют выборкой?
4. На чём должен основываться сбор данных?
5. Какие существуют способы представления данных?
6. Приведите примеры применения статистической информации в форме средних значений.
7. Приведите примеры, когда статистическая информация в форме средних значений неточно отображает ситуацию.
8. Опишите частотную таблицу.
9. Опишите, что такое мода.
10. Опишите, как найти относительную частоту.

11. Какое число называют медианой упорядоченной выборки?

12. Что называют мерами центральной тенденции совокупности данных?

Упражнения

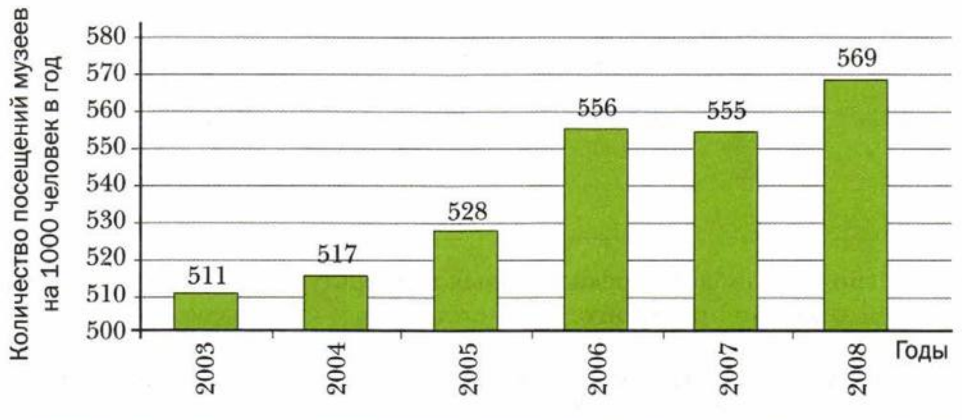
665. Используя диаграмму, на которой отображено, сколько посещений музеев в год в России приходится на 1000 человек населения (рис. 95), определите:

1) в какой из рассматриваемых годов посещаемость музеев была наибольшей; наименьшей;

2) на сколько человек выросла посещаемость музеев в 2007 г. по сравнению с 2004 г.;

3) на сколько процентов возросла посещаемость музеев в 2008 г. по сравнению с 2003 г. (ответ округлите до десятых).

Рис. 95



666. Учащиеся 9 классов занимаются в разных кружках. Используя диаграмму (рис. 96), дайте ответы на вопросы.

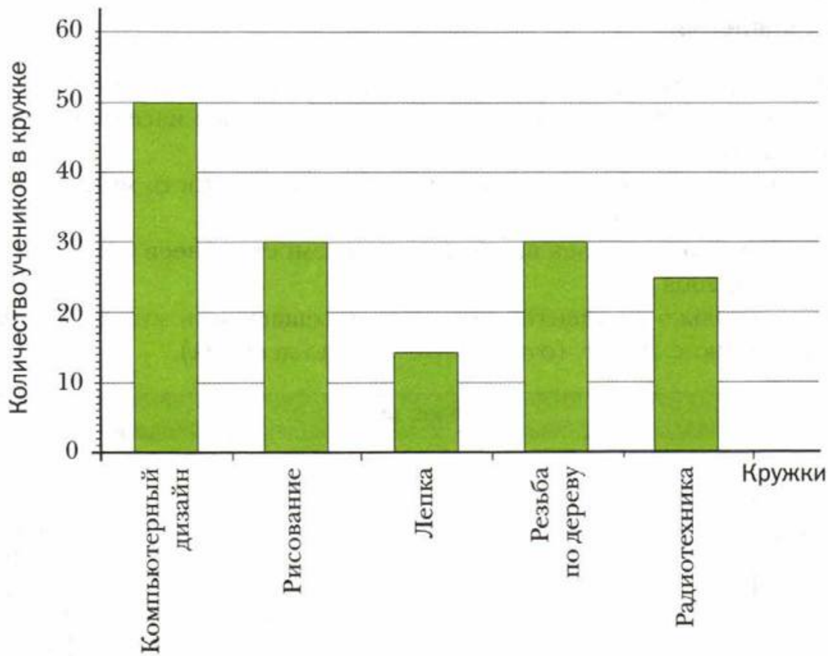
1) Какой кружок посещает больше всего девятиклассников?

2) Какие кружки посещает одинаковое количество девятиклассников?

3) Какую часть от количества учеников, занимающихся в кружке компьютерного дизайна, составляет количество учеников, занимающихся в кружке рисования?

4) Сколько процентов составляет количество учеников, занимающихся в кружке лепки, от количества учеников, занимающихся в кружке радиотехники?

Рис. 96



667. Используя таблицу среднегодовых температур воздуха в отдельных городах России, постройте соответствующую столбчатую диаграмму.

Город	Температура, °C	Город	Температура, °C
Екатеринбург	2,7	Оренбург	5,0
Казань	4,1	Пермь	2,3
Краснодар	11,4	Тула	5,2
Мурманск	0,3	Хабаровск	2,2
Нижний Новгород	4,4	Челябинск	2,9

668. Используя таблицу развития Московского метрополитена в 1940–2010 гг., постройте график увеличения количества его станций.

Год	Количество станций	Год	Количество станций
1940	22	1980	115
1950	35	1990	143
1960	56	2000	161
1970	89	2010	182

669. Определите, является ли репрезентативной выборка.

1) Чтобы узнать, как часто жители города в выходные дни бывают на природе, были опрошены члены трёх садовых кооперативов.

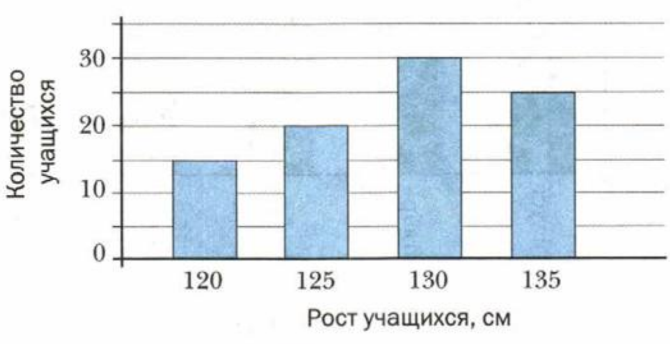
2) В целях выяснения знания девятиклассниками творчества А.С. Пушкина случайным образом были опрошены 5000 девятиклассников в разных регионах страны.

3) Для определения процента пользователей Интернета от общего населения России случайным образом были опрошены 1000 москвичей.

4) Для выяснения рейтинга молодёжной телепрограммы случайным образом были опрошены 10 000 юношей и девушек в возрасте от 15 до 20 лет в разных регионах страны.

670. В школе измерили рост 90 шестиклассников с точностью до 5 см. Результаты измерений отобразили в виде столбчатой диаграммы (рис. 97). Укажите моду данной выборки.

Рис. 97

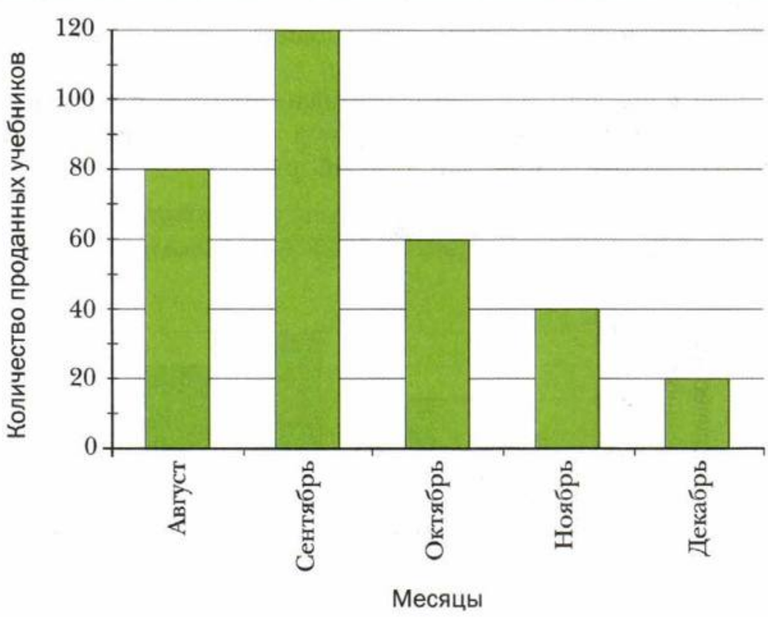


671. На графике (рис. 98) отображены объёмы продажи пирожков в школьном буфете в течение одной недели. Сколько в среднем продавали пирожков за один день?

Рис. 98

672. На гистограмме (рис. 99) отображены объёмы продаж учебников по математике в течение пяти месяцев в одном из магазинов. Сколько учебников по математике продавали в среднем за один месяц?

Рис. 99



673. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах совокупности данных:

1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;

2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

674. Девушки 9 класса на уроке физкультуры сдавали зачёт по прыжкам в высоту. Учитель записал такую последовательность результатов: 105 см, 65 см, 115 см, 100 см, 105 см, 110 см, 110 см, 115 см, 110 см, 100 см, 115 см. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах полученных данных.

675. Классный руководитель 9 класса ведёт учёт посещения учащимися занятий. В конце недели его записи выглядели так.

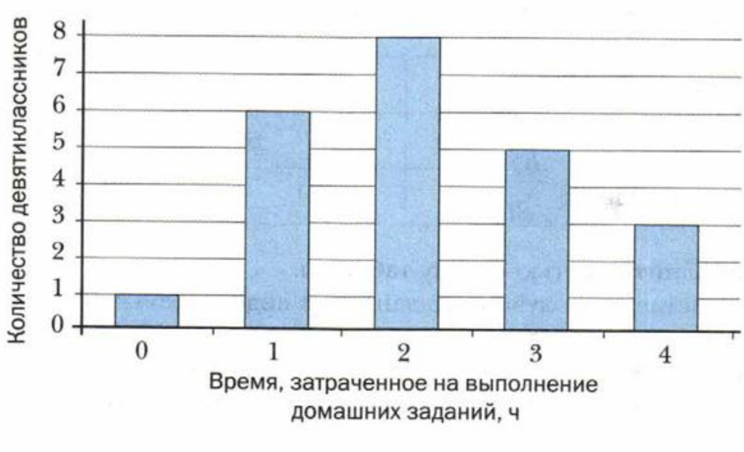
День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница
Количество отсутствующих	3	2	5	4	8

1) Найдите, сколько учащихся отсутствовало в среднем в день в течение этой недели.

2) Найдите моду полученных данных.

676. В 9 классе, в котором учится 23 ученика, провели опрос: сколько часов в день тратит девятиклассник на выполнение домашних заданий. Ответы учащихся представлены в виде гистограммы (рис. 100).

Рис. 100



1) Заполните частотную таблицу.

Время, затраченное на выполнение домашних заданий, ч	0	1	2	3	4
Частота					
Относительная частота, %					

2) Сколько времени в день в среднем учащийся этого класса выполняет домашнее задание? (Найдите среднее значение ряда данных.)

3) Сколько времени выполняет домашнее задание большинство учеников этого класса? (Найдите моду ряда данных.)

677. В таблице приведено распределение по возрасту отдыхающих в молодёжном спортивном лагере в один из летних месяцев.

Возраст, лет	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Количество отдыхающих	12	21	20	32	20	20	19	24	15	17
Относительная частота, %										

1) Заполните третью строку таблицы.

2) Найдите моду и среднее значение полученных данных.

678. Учащихся одной пятигорской школы опросили: сколько раз они летали на самолёте. Полученные данные приведены в таблице.

Количество полётов	0	1	2	3	4	5
Количество учащихся	280	92	56	38	20	14
Относительная частота, %						

1) Заполните третью строку таблицы.

2) Представьте полученные данные в виде столбчатой диаграммы.

3) Найдите моду и среднее значение полученных данных.

4) Поясните, можно ли считать рассматриваемую выборку репрезентативной для выводов относительно всех школьников города Пятигорска.

679. В течение первых десяти дней мая температура воздуха в 6 ч утра была такой: 16 °С; 14 °С; 12 °С; 16 °С; 15 °С; 15 °С; 13 °С; 15 °С; 17 °С; 14 °С. Найдите меры центральной тенденции полученной совокупности данных. Заполните частотную таблицу.

Температура воздуха, °С	
Частота	
Относительная частота, %	

680. В таблице приведено распределение сотрудников детского сада соответственно стажу работы.

Стаж работы в годах	3	6	10	12	15	16	20
Количество сотрудников	2	4	4	3	2	4	5

Найдите моду и среднее значение выборки, постройте соответствующую гистограмму.

681. У 24 легковых автомобилей сделали замеры расхода горючего на 100 км пути и получили ряд данных: 8 л, 9 л, 7,5 л, 9 л, 10 л, 8,5 л, 9 л, 8 л, 7,5 л, 9 л, 10 л, 7,5 л, 9 л, 10 л, 7,5 л, 8,5 л, 8 л, 7,5 л, 8,5 л, 10 л, 8,5 л, 9 л, 8 л, 7,5 л.

1) Составьте частотную таблицу.
2) Найдите среднее значение и моду данной выборки.
3) Постройте соответствующую гистограмму.

682. Во время тестирования по алгебре 25 учеников 9 класса сделали следующее количество ошибок: 4, 3, 3, 1, 3, 4, 4, 5, 3, 0, 1, 4, 4, 4, 5, 3, 5, 4, 0, 4, 1, 4, 2, 2, 3.

1) Составьте частотную таблицу.
2) Найдите среднее значение и моду данной выборки.
3) Постройте соответствующую гистограмму.

683. Выпишите все ваши оценки по алгебре, полученные в течение года. Найдите среднее значение, моду и медиану полученного ряда данных.

684. Директор фирмы получает 120 000 р. в месяц, два его заместителя по 80 000 р., а остальные 17 работников фирмы – по 20 000 р. в месяц. Найдите среднее значение, моду, медиану заработной платы в этой фирме.

685. Прочтите отрывок из стихотворения А.С. Пушкина.

Унылая пора! Очей очарованье!
Приятна мне твоя прощальная краса –
Люблю я пышное природы увяданье,
В багрец и в золото одетые леса,
В их сенях ветра шум и свежее дыханье,
И мглой волнистою покрыты небеса,
И редкий солнца луч, и первые морозы,
И отдалённые седой зимы угрозы.

Составьте частотную таблицу наличия букв «а», «е», «и», «б», «н», «о», «р», «у», «ф», «я» в данном стихотворении. Определите моду полученных данных.

686. Постройте ряд: 1) из пяти чисел; 2) из шести чисел, у которого:
а) среднее значение равно медиане;
б) среднее значение больше медианы.

Упражнения для повторения

687. Упростите выражение

$$\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a}{a+1}\right):\frac{3a+1}{a^2+a}.$$

688. Сократите дробь:

1) $\dfrac{9x^2-1}{3x^2-4x+1}$; 2) $\dfrac{2x^2-5x+3}{4x^2-12x+9}$.

689. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}2x-y=13,\\ x^2-y^2=23;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x^2-y^2=23,\\ 2x^2+y^2=41.\end{cases}$

690. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{3x-2x^2}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+7}}$.

691. Решите неравенство $(x^2+1)(x^2-x-2)<0$.

Задание № 4 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Катер проплыл по озеру на 5 км больше, чем по реке против течения, затратив на путь по реке на 15 мин больше, чем по озеру. Собственная скорость катера равна 10 км/ч, а скорость течения реки – 2 км/ч.

Пусть расстояние, которое проплыл катер по реке, равно x км. Какое из данных уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии?

А) $\frac{x+5}{10} - \frac{x}{8} = 15$ В) $\frac{x+5}{10} - \frac{x}{12} = 15$

Б) $\frac{x+5}{10} - \frac{x}{8} = \frac{1}{4}$ Г) $\frac{x+5}{10} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4}$

2. Первый рабочий трудился 3 ч, а второй – 4 ч. Вместе они изготовили 44 детали, причём первый рабочий изготавливал за 1 ч на 2 детали меньше, чем второй рабочий за 2 ч.

Пусть первый рабочий за 1 ч изготавливал x деталей, а второй – y деталей. Какая из данных систем уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии?

А) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ В) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ y - 2x = 2 \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ 2y - x = 2 \end{cases}$

3. Два тракториста, работая вместе, могут вспахать поле за 2 ч 40 мин. Если первый тракторист проработает 1 ч, а потом его сменит второй тракторист, который проработает 2 ч, то вспаханной окажется половина поля.

Пусть первый тракторист может самостоятельно вспахать поле за x ч, а второй – за y ч. Какая из данных систем уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии?

А) $\begin{cases} x + y = 2{,}4, \\ x + 2y = 0{,}5 \end{cases}$ В) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$ Г) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2\frac{2}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$

4. Морская вода содержит 6 % соли. Сколько килограммов воды надо взять, чтобы получить 48 кг соли?
А) 80 кг Б) 60 кг В) 800 кг Г) 600 кг

5. Французский язык изучают 12 учащихся класса. Сколько процентов учащихся класса изучают французский язык, если всего в классе 30 учащихся?
А) 24 % Б) 30 % В) 40 % Г) 48 %

6. Вкладчик положил в банк 40 000 р. под 10 % годовых. Сколько денег будет на его счёте через два года?
А) 48 400 р. В) 40 800 р.
Б) 48 000 р. Г) 44 000 р.

7. Цена некоторого товара после двух последовательных повышений выросла на 50 %, причём в первый раз цена была повышена на 20 %. На сколько процентов состоялось второе повышение?
А) на 30 % Б) на 25 % В) на 20 % Г) на 15 %

8. Стул стоил 1500 р. Сначала его цену снизили, а потом повысили на одно и то же количество процентов. После этого стул стал стоить 1440 р. На сколько процентов изменяли каждый раз цену стула?
А) на 20 % Б) на 15 % В) на 10 % Г) на 18 %

9. Сплав массой 800 г содержит 15 % меди. Сколько граммов меди надо добавить к этому сплаву, чтобы медь в нём составила 20 %?
А) 50 г Б) 40 г В) 30 г Г) 5 г

10. Запишите в виде двойного неравенства то, что $x = 12 \pm 0{,}2$.
А) $11{,}8 \leq x \leq 12{,}2$ В) $11{,}8 \leq x \leq 12$
Б) $12 \leq x \leq 12{,}2$ Г) $11{,}6 \leq x \leq 12{,}4$

11. Известно, что $x = 23{,}5 \pm 0{,}1$. Какому из данных чисел может быть равным точное значение x?
А) 23,3 Б) 23,7 В) 24 Г) 23,6

12. Найдите абсолютную погрешность приближения числа 5,307 числом 5,31.
А) 0,003 Б) −0,003 В) 0,03 Г) 0,004

13. В справочнике указано, что плотность серебра равна 10,5 г/см^3. С какой точностью указано приближённое значение плотности серебра?
А) с точностью до 0,01 г/см^3
Б) с точностью до 0,1 г/см^3
В) с точностью до 0,5 г/см^3
Г) с точностью до 0,051 г/см^3

14. В справочнике указано, что масса атома натрия равна $3{,}81 \cdot 10^{-26}$ кг. С какой точностью указано приближённое значение массы атома натрия?

А) с точностью до 10^{-26} кг
Б) с точностью до 10^{-27} кг
В) с точностью до 10^{-28} кг
Г) с точностью до 10^{-25} кг

15. В справочнике указано, что плотность никеля равна 8,9 г/см^3. Оцените относительную погрешность этого приближения.

А) до 2 % Б) до 1,1 % В) до 1,2 % Г) до 0,1 %

16. Найдите среднее значение выборки, состоящей из чисел 1,6; 1,8; 2,5; 2,2; 0,9.

А) 2,5 Б) 2,2 В) 1,8 Г) 2,6

17. Укажите медиану выборки 2, 5, 6, 8, 9, 11.

А) 6 Б) 7 В) 8 Г) 9

18. Учащихся 9 класса опросили, сколько времени они затрачивают на выполнение домашнего задания по алгебре. Были получены такие данные:

Время выполнения задания, мин	15	20	30	45	60
Количество учащихся	3	7	6	10	4

Чему равна мода полученных данных?

А) 30 мин В) 10 учащихся
Б) 45 мин Г) 6 учащихся

Задание № 5 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. В магазине продаются 6 разных чашек и 4 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

А) 10 Б) 6 В) 24 Г) 4

2. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 7, 9 так, чтобы в каждом числе все цифры были различными?

А) 6 Б) 3 В) 27 Г) 8

3. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

А) 5 Б) 20 В) 100 Г) 120

4. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей гербов и чисел можно при этом получить?

А) 6 Б) 3 В) 10 Г) 8

5. Стоит терем-теремок из пяти этажей. Каждый этаж можно покрасить в красный или синий цвет (соседние этажи могут быть одного цвета). Сколько существует различных раскрасок этого теремка?

А) 5 Б) 32 В) 10 Г) 20

6. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

А) 10 Б) 11 В) 110 Г) 100

7. Сколько существует четырёхзначных чисел, все цифры которых различны и нечётны?

А) 5 Б) 100 В) 120 Г) 110

8. Сколько существует четырёхзначных чисел, все цифры которых различны и чётны?

А) 96 Б) 48 В) 100 Г) 120

9. В магазине продаются 6 разных ложек, 4 разные вилки и 3 разных ножа. Сколькими способами можно купить два предмета с разными наименованиями?

А) 24 Б) 54 В) 72 Г) 13

10. После того как смешали 50-процентный и 20-процентный растворы кислоты, получили 600 г 25-процентного раствора. Сколько было граммов 50-процентного раствора?

А) 500 г Б) 300 г В) 250 г Г) 100 г

11. Из натуральных чисел от 1 до 18 включительно ученик наугад называет одно. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 12?

А) $\frac{1}{4}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{1}{6}$ Г) $\frac{1}{18}$

12. В лотерее разыгрывалось 12 компьютеров, 18 фотоаппаратов и 120 калькуляторов. Всего было выпущено 15 000 лотерейных билетов. Какова вероятность, приобретя один билет, не выиграть никакого приза?

А) $\frac{1}{10}$ Б) $\frac{1}{100}$ В) $\frac{9}{10}$ Г) $\frac{99}{100}$

13. Из двузначных чётных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что это число будет кратным числу 7?

А) $\frac{1}{9}$ Б) $\frac{7}{45}$ В) $\frac{1}{14}$ Г) $\frac{2}{15}$

14. В коробке лежат 12 белых и 16 красных шаров. Какова вероятность того, что выбранный наугад шар окажется белым?

А) $\frac{3}{4}$ Б) $\frac{3}{7}$ В) $\frac{1}{12}$ Г) $\frac{4}{7}$

15. В коробке лежат карандаши, из них 24 карандаша – синие, 8 карандашей – зелёные, а остальные – жёлтые. Сколько карандашей лежит в коробке, если вероятность того, что выбранный наугад карандаш будет жёлтым, составляет $\frac{1}{3}$?

А) 48 карандашей В) 45 карандашей
Б) 54 карандаша Г) 42 карандаша

16. Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наугад. Какова вероятность правильно набрать номер, если абонент только помнит, что две последние цифры нечётные?

А) $\frac{1}{20}$ Б) $\frac{1}{5}$ В) $\frac{1}{100}$ Г) $\frac{1}{25}$

17. Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наугад. Какова вероятность правильно набрать номер, если абонент только помнит, что две последние цифры различные и чётные?

А) $\frac{1}{20}$ Б) $\frac{1}{25}$ В) $\frac{1}{16}$ Г) $\frac{1}{100}$

18. Среди двузначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что его цифры в разрядах десятков и единиц равны?

А) $\frac{1}{9}$ Б) $\frac{1}{2}$ В) $\frac{1}{10}$ Г) $\frac{1}{100}$

Итоги главы 3

Этапы решения прикладной задачи

1) Построение математической модели.
2) Решение математической задачи.
3) Анализ полученного результата, исходя из содержания прикладной задачи.

Формула сложных процентов

$$a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Абсолютная погрешность приближения

Абсолютной погрешностью приближения называют модуль разности между точным значением величины и её приближённым значением.

Относительная погрешность

Относительной погрешностью приближения называют отношение абсолютной погрешности к модулю приближённого значения величины.

Правило суммы

Если множество A состоит из m элементов, а множество B — из k элементов, причём эти множества не имеют общих элементов, то выбор «a или b», где $a \in A$, $b \in B$, можно осуществить $m + k$ способами.

Правило произведения

Если элемент a можно выбрать m способами и после каждого такого выбора элемент b можно выбрать k способами, то выбор «a и b» в указанном порядке можно осуществить mk способами.

Частота случайного события

$$\text{Частота} = \frac{\text{Количество появлений интересующего события}}{\text{Количество испытаний (наблюдений)}}$$

Достоверное событие

Событие, которое при данном комплексе условий обязательно состоится при любом испытании, называют достоверным.

Невозможное событие

Событие, которое при данном комплексе условий не может состояться ни при каком испытании, называют невозможным.

Классическое определение вероятности

Если испытание заканчивается одним из n равновозможных результатов, из которых m приводят к наступлению события A, то вероятностью события A называют отношение $\frac{m}{n}$.

Статистика

Статистика (от лат. *status* — «состояние») — это наука о сборе, обработке и анализе количественных данных, которые характеризуют массовые явления.

Этапы статистического исследования

Сбор данных

↓

Обработка данных и их представление в удобной форме

↓

Анализ данных

↓

Выводы и рекомендации

Глава 4. Числовые последовательности

В этой главе вы познакомитесь с такими новыми понятиями, как последовательность, n-й член последовательности, арифметическая и геометрическая прогрессии, конечные и бесконечные последовательности, сумма бесконечной геометрической прогрессии.

Научитесь находить члены прогрессий, вычислять суммы n первых их членов, записывать бесконечные периодические десятичные дроби в виде обыкновенных дробей.

§ 21. Числовые последовательности

Часто в повседневной жизни встречаются объекты, с которыми удобно обращаться, если их предварительно пронумеровать. Например, номера имеют месяцы и кварталы года, дни недели, подъезды и квартиры дома, вагоны поезда, и даже каждый ученик вашего класса имеет свой порядковый номер в классном журнале.

Объекты, которые пронумерованы подряд натуральными числами 1, 2, 3, ..., n, ..., образуют **последовательности**.

Так, можно говорить о последовательности страниц книги, букв слова, этажей дома и т. д.

Объекты, образующие последовательность, называют **членами последовательности**. Каждый член последовательности имеет свой номер. Например, январь – это **первый член** последовательности месяцев года, число 3 – **второй член** последовательности простых чисел. Вообще, если член последовательности имеет номер n, то его называют **n-м членом последовательности**.

Если членами последовательности являются числа, то такую последовательность называют **числовой**.

Приведём примеры числовых последовательностей.

1, 2, 3, 4, 5, ... – последовательность натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... – последовательность чётных чисел;

0,3; 0,33; 0,333; ... – последовательность десятичных приближений дроби $\frac{1}{3}$;

19, 38, 57, 76, 95 – последовательность двузначных чисел, кратных 19;

–1, –2, –3, –4, –5, ... – последовательность отрицательных целых чисел.

В дальнейшем мы будем рассматривать только числовые последовательности.

Последовательности бывают **конечными** и **бесконечными**. Например, последовательность чётных натуральных чисел – это бесконечная последовательность, а последовательность двузначных чисел, кратных 19, – это конечная последовательность.

Для обозначения членов последовательности используют буквы с индексами:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Индекс указывает порядковый номер члена последовательности. Для обозначения самой последовательности используют запись (a_n). Например, если (p_n) – последовательность простых чисел, то $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ и т. д.

Познакомимся с основными способами задания последовательности.

Рассмотрим последовательность, у которой первый член равен 1, а каждый следующий член на 3 больше предыдущего. Такой способ задания последовательности называют **описательным**. Его можно проиллюстрировать с помощью записи с тремя точками, выписав несколько первых членов последовательности в порядке возрастания номеров:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots .$$

Эту запись целесообразно применять тогда, когда понятно, какие числа должны быть записаны вместо трёх точек.

Например, в рассматриваемой последовательности понятно, что после числа 19 должно быть записано число 22.

Если последовательность является конечной, то её можно задать с помощью таблицы. Например, следующая таблица задаёт последовательность кубов однозначных натуральных чисел.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Последовательности можно задавать с помощью формул. Например, равенство $x_n = 2^n$, где переменная n принимает все натуральные значения, задаёт последовательность (x_n) натуральных степеней числа 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots .$$

В таких случаях говорят, что последовательность задана с помощью **формулы n-го члена последовательности.**

Рассмотрим несколько примеров.

Формула $a_n = 2n - 1$ задаёт последовательность натуральных нечётных чисел:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots .$$

Формула $y_n = (-1)^n$ задаёт последовательность (y_n), в которой все члены с нечётными номерами равны -1, а с чётными номерами равны 1:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots .$$

Формула $c_n = 7$ задаёт последовательность (c_n), все члены которой равны числу 7:

$$7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \ldots .$$

Рассмотренные способы задания последовательностей помогают проследить связь между понятиями «функция» и «последовательность».

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, областью определения которой является множество натуральных чисел или множество n первых натуральных чисел. Тогда функция f задаёт бесконечную последовательность $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ или конечную последовательность $f(1), f(2), \ldots, f(n)$.

Например, если функция f, областью определения которой является множество натуральных чисел, задана формулой $f(x) = x^2$, то эта функция задаёт последовательность квадратов натуральных чисел:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots .$$

Нередко последовательность задают правилом, которое позволяет найти следующий член, зная предыдущий.

Рассмотрим последовательность (a_n), первый член которой равен 1, а каждый следующий член последовательности в 3 раза больше предыдущего. Имеем:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots .$$

Эту последовательность, заданную описательно, также определяют такие условия:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n.$$

Эти равенства указывают первый член последовательности и правило, с помощью которого по каждому члену последовательности можно найти следующий за ним член:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 3a_1 = 3,$$
$$a_3 = 3a_2 = 9,$$
$$a_4 = 3a_3 = 27$$
и т. д.

Формулу, выражающую член последовательности через один или несколько предыдущих членов, называют **рекуррентной формулой** (от лат. *recurro* — «возвращаться»). В приведённом примере это формула $a_{n+1} = 3a_n$, где n — натуральное число. Условия, определяющие первый или несколько первых членов, называют **начальными условиями**. В рассматриваемом примере начальное условие — это равенство $a_1 = 1$.

Способ задания последовательности с помощью начальных условий и рекуррентной формулы называют **рекуррентным способом** задания последовательности.

При рекуррентном способе задания последовательности первый или несколько первых членов последовательности заданы, а все остальные вычисляют друг за другом. С этой точки зрения способ задания последовательности формулой n-го члена кажется более удобным: с его помощью можно найти нужный член последовательности, зная лишь его номер.

Пример. Последовательность (c_n) задана формулой n-го члена $c_n = 37 - 3n$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 19; 2) -7? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

Решение. 1) Если число 19 является членом данной последовательности, то существует такое натуральное значение n, при котором выполняется равенство $37 - 3n = 19$. Отсюда $3n = 18$; $n = 6$. Следовательно, число 19 является шестым членом последовательности (c_n).

2) Имеем: $37 - 3n = -7$; $3n = 44$; $n = 14\frac{2}{3}$. Так как число $14\frac{2}{3}$ не является натуральным, то число -7 не является членом данной последовательности.

Ответ: 1) является, $n = 6$; 2) не является. ◄

1. Что образуют объекты, которые пронумерованы подряд натуральными числами?
2. Как называют объекты, образующие последовательность?
3. Как называют член последовательности, имеющий номер n?
4. Какую последовательность называют числовой?
5. В каком случае последовательность считают заданной?
6. Какие способы задания последовательности вы знаете?
7. Поясните, что такое формула n-го члена последовательности.
8. Какова связь между понятиями «функция» и «последовательность»?
9. Поясните, что такое рекуррентная формула.

Упражнения

692. Запишите в порядке возрастания пять первых членов последовательности:
1) двузначных чисел, кратных числу 4;
2) неправильных обыкновенных дробей с числителем 11;
3) натуральных чисел, дающих при делении на 8 остаток 5.
Укажите, конечными или бесконечными являются эти последовательности.

693. Последовательность (a_n) является последовательностью трёхзначных чисел, кратных числу 5, взятых в порядке возрастания. Заполните таблицу:

n	1	2	3	4	5	6
a_n						

694. Найдите четыре первых члена последовательности (a_n), заданной формулой n-го члена:

1) $a_n = n + 4$;
2) $a_n = 4n - 3$;
3) $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$;
4) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$.

695. Найдите второй, седьмой и сотый члены последовательности (b_n), заданной формулой n-го члена:

1) $b_n = \dfrac{10}{n}$;
2) $b_n = 5 - 2n$;
3) $b_n = n^2 + 2n$;
4) $b_n = (-1)^{n+1}$.

696. Последовательность (c_n) задана формулой n-го члена $c_n = (-1)^n \cdot 5$. Найдите:

1) c_1; 2) c_8; 3) c_{2k}; 4) c_{2k+1}; 5) c_{k+2}.

697. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n = 3n + 1$. Найдите:

1) x_1; 2) x_7; 3) x_{20}; 4) x_{300}; 5) x_{k+1}.

698. Найдите пять первых членов последовательности (a_n), если:

1) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$;
2) $a_1 = -2$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$.

699. Найдите пять первых членов последовательности (b_n), если:

1) $b_1 = 18$, $b_{n+1} = -\dfrac{b_n}{3}$;
2) $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n^2 + 2b_{n+1}$.

700. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = 7n + 2$. Является ли членом этой последовательности число:

1) 23; 2) 149; 3) 47?

В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

701. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = n^2 - 4$. Является ли членом этой последовательности число:

1) 5; 2) 16; 3) 77?

В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

702. Сколько отрицательных членов содержит последовательность (x_n), заданная формулой n-го члена $x_n = 6n - 50$?

703. Найдите номер первого отрицательного члена последовательности (y_n), заданной формулой n-го члена $y_n = 38 - 3n$.

704. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = n^2 - 3n - 8$. Найдите номера членов этой последовательности, которые меньше 10.

705. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = -n^2 + 15n - 20$. Сколько членов этой последовательности больше, чем 16?

706. Подберите одну из возможных формул n-го члена последовательности, первыми членами которой являются числа:

1) 1, 4, 9, 25, ...;
2) 5, 8, 11, 14, 17, ...;
3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;
4) 0, 2, 0, 2, 0, ...

707. Подберите одну из возможных формул n-го члена последовательности, первыми членами которой являются числа:

1) 2, 9, 28, 65, 126, ...;
2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots$.

Упражнения для повторения

708. Сократите дробь:

1) $\frac{3x^2 - 7x + 2}{2 - 6x}$; 2) $\frac{5xy - 5x - 2y + 2}{10x^2 - 9x + 2}$.

709. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{\sqrt{2 - x}}{x + 2}$; 2) $y = \frac{\sqrt{6 - 5x - x^2}}{x - 1}$.

710. Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной в начале координат, проходящая через точку $A\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$. Задайте эту функцию формулой.

711. Рабочий планировал за некоторое время изготовить 160 деталей. Однако он закончил работу на 3 ч раньше, чем планировал, так как изготавливал на 12 деталей в час больше запланированного. Сколько деталей в час изготавливал рабочий?

Учимся делать нестандартные шаги

712. Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 5$. Докажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.

Когда сделаны уроки

О кроликах, подсолнухах, сосновых шишках и «золотом сечении»

Рассмотрим последовательность (u_n), заданную рекуррентно такими соотношениями:

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Запишем несколько её первых членов:

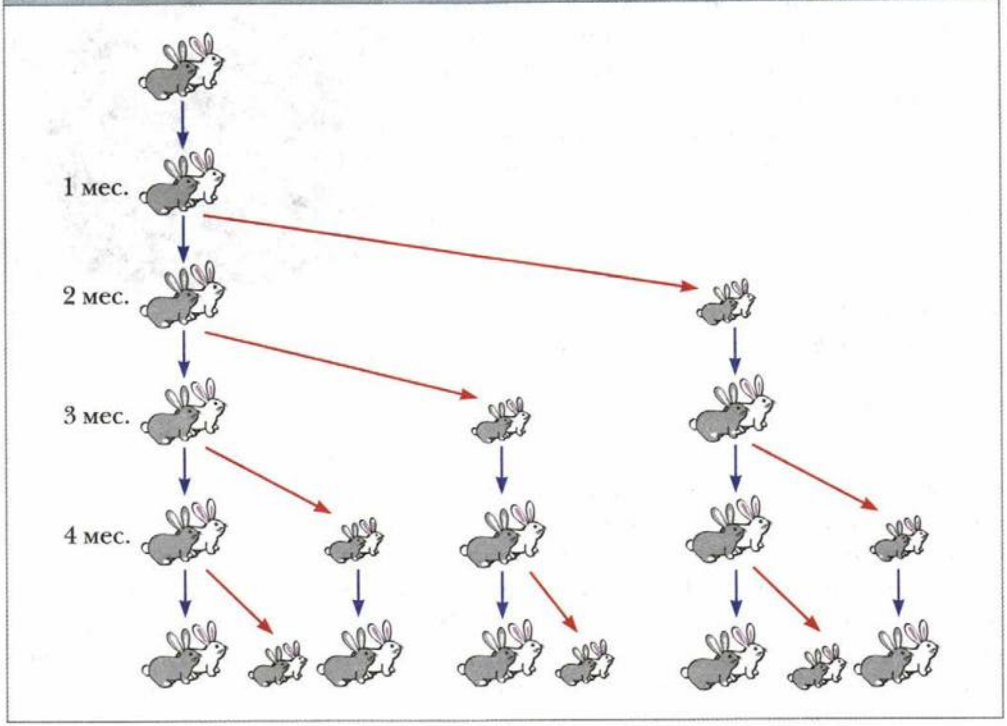
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots .$$

Члены этой последовательности называют **числами Фибоначчи**. Такое название объясняется тем, что итальянский математик и купец Леонардо Пизанский (Фибоначчи), решая популярную в XII в. задачу о численности потомства пары кроликов, первым обратил внимание на замечательные свойства этой последовательности. В этой задаче численность потомства кроликов увеличивается так: каждая взрослая пара кроликов ежемесячно приносит пару крольчат, а те через месяц также начинают приносить потомство. На рисунке 101 количество пар кроликов соответствует последовательности чисел Фибоначчи.

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1170–1228)

Итальянский математик. Путешествуя по странам Востока, ознакомился с достижениями арабских математиков и способствовал распространению этих знаний в Европе. Его основные труды: «Liber Abaci» (1202) — трактат об арифметике и алгебре, «Practica Geometriae» (1220) заложили основы применения алгебраических методов в геометрии.

Рис. 101



Числа Фибоначчи можно встретить в различных ситуациях, и даже некоторые явления природы связаны с этими числами. Представьте себе, что вы идёте по дорожке, вымощенной квадратными плитками в один ряд, наступая каждый раз на следующую плитку или через одну. В этом случае количество способов пройти дорожку из n плиток равно n-му члену последовательности Фибоначчи (проверьте это самостоятельно, например для случая $n = 8$).

Если посмотреть на семена в головке подсолнуха или ромашки, то можно увидеть, что они расположены в виде двух семейств спиралей, закручивающихся в противоположных направлениях. Количества спиралей в этих семействах являются соседними членами последовательности Фибоначчи. Как правило, для подсолнуха эти числа равны 34 и 55, однако встречаются и гиганты с 89 и 144 спиралями. Подобное свойство[1] можно обнаружить в структуре сосновых шишек. То же явление наблюдается и на плодах ананаса, где спиралей обычно бывает 8 и 13.

Если в последовательности Фибоначчи для каждого натурального n вычислить отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, то получим последовательность 1; 2; 1,5; 1,(6); 1,6; 1,625; 1,(615384); 1,61(904761); ... .

Эта последовательность обладает таким свойством: с возрастанием номеров её члены всё меньше и меньше отличаются от числа $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$.

Ещё в давние времена с этим числом люди связывали свои представления о красоте и гармонии. Греческие скульпторы хорошо знали о соответствии правильных пропорций человеческого тела этому магическому числу. И не зря античные зодчие использовали его в своих бессмертных творениях. Так, отношение длины Парфенона[2] к его высоте приближённо равно 1,618. Гений эпохи Возрождения Леонардо да Винчи считал, что среди многих отношений, которые использует Творец, существует одно, единственное и неповторимое. Именно его он назвал «золотым сечением».

Французский учёный Жак Бине (1786–1856) нашёл формулу n-го члена последовательности Фибоначчи:

$$u_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Трудно поверить, что эта формула задаёт натуральные числа. Тем не менее это так.

§ 22. Арифметическая прогрессия

Рассмотрим такие последовательности:
2, 7, 12, 17, 22, 27, ...;
1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; ...;
3, 1, –1, –3, –5, –7, ...

[1] В ботанике такое сочетание двух семейств спиралей называют филлотаксисом.

[2] Парфенон – храм в Афинах, построенный в V в. до н. э.

Они обладают следующей характерной особенностью: *каждый следующий член последовательности получен в результате прибавления к предыдущему одного и того же числа.* Для первой последовательности это число равно 5, для второй это число равно 0,5, для третьей это число равно −2.

С подобными последовательностями людям приходилось иметь дело ещё в древние времена, когда они считали предметы парами, пятёрками, десятками, дюжинами и т. д. Такие последовательности называют **арифметическими прогрессиями** (от лат. *progressio* – «движение вперёд»).

Определение

Арифметической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Число, равное разности последующего и предыдущего членов последовательности, называют **разностью арифметической прогрессии** и обозначают буквой d (первой буквой латинского слова *differentia* – «разность»).

Итак, если (a_n) – арифметическая прогрессия с разностью d, то

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots,$$

т. е. для любого натурального числа n выполняется равенство $a_{n+1} - a_n = d$.

Отсюда

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Следовательно, арифметическую прогрессию можно задать рекуррентно:

$$\boxed{\boldsymbol{a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d}}$$

Таким образом, *чтобы задать арифметическую прогрессию, надо указать её первый член и разность.*

Приведём несколько примеров.

Если $a_1 = 2$ и $d = 5$, то получим арифметическую прогрессию, приведённую в начале параграфа:

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots .$$

Если $a_1 = 1$ и $d = 2$, то получим арифметическую прогрессию – последовательность нечётных чисел:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots .$$

Мы привели примеры арифметических прогрессий, у которых разность является положительным числом. Заметим, что разность может быть отрицательным числом и даже нулём. Так, последовательность 5, 5, 5, 5, ..., все члены которой равны между собой, является арифметической прогрессией, у которой $a_1 = 5$, $d = 0$.

Покажем, как можно задать арифметическую прогрессию с помощью формулы n-го члена.

Из определения арифметической прогрессии (a_n) следует:

$a_2 = a_1 + d$;

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2$;

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + d \cdot 3$;

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + d \cdot 4$.

Эти примеры помогают заметить такую закономерность: чтобы найти некоторый член арифметической прогрессии, можно к первому члену прибавить произведение разности d и числа, на 1 меньшего, чем номер искомого члена. Отсюда, например, $a_6 = a_1 + d \cdot 5$, $a_7 = a_1 + d \cdot 6$, и вообще

$$\boxed{a_n = a_1 + d(n-1)}$$

Записанное равенство называют **формулой n-го члена арифметической прогрессии**.

Установим важное свойство членов арифметической прогрессии (a_n).

Имеем:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2, \text{ отсюда } 2a_2 = a_1 + a_3,\ a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}.$$

$$a_3 - a_2 = a_4 - a_3, \text{ отсюда } 2a_3 = a_2 + a_4,\ a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}.$$

Вообще, для любого натурального n, большего 1, можно записать $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, откуда

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Любой член арифметической прогрессии, кроме первого (и последнего, если прогрессия конечна), равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов.

<u>**Пример.**</u> Докажите, что последовательность (a_n), заданная формулой n-го члена $a_n = 9n - 2$, является арифметической прогрессией.

Решение. Рассмотрим разность двух произвольных последовательных членов последовательности:

$a_{n+1} - a_n = 9(n + 1) - 2 - (9n - 2) = 9n + 9 - 2 - 9n + 2 = 9.$

Следовательно, при любом натуральном n выполняется равенство $a_{n+1} = a_n + 9$, т. е. каждый член данной последовательности, начиная со второго, равен предыдущему члену, к которому прибавлено одно и то же число 9. Таким образом, данная последовательность является арифметической прогрессией. ◄

1. Какую последовательность называют арифметической прогрессией?
2. Какое число называют разностью арифметической прогрессии? Как обозначают это число?
3. Что надо указать, чтобы задать арифметическую прогрессию?
4. Как можно задать арифметическую прогрессию рекуррентно?
5. Какой вид имеет формула n-го члена арифметической прогрессии?
6. Как связаны между собой любой член арифметической прогрессии и соседние с ним члены?

Упражнения

713. Среди данных последовательностей укажите арифметические прогрессии:

1) 3, –6, 12, –24;
2) 4, 8, 12, 16;
3) 5, 10, 5, 10;
4) 42, 39, 36, 33;
5) –5, –3, –1, 1;
6) 1,2; 1,3; 1,5; 1,6.

714. Является ли арифметической прогрессией последовательность (в случае утвердительного ответа укажите разность прогрессии):
1) 24, 22, 20, 18; 2) 16, 17, 19, 23; 3) –3, 2, 7, 12?

715. Найдите четыре первых члена арифметической прогрессии, первый член которой равен 1,2, а разность равна –0,3.

716. Первый член арифметической прогрессии равен –7,4, а разность равна 1,8. Найдите пять первых членов прогрессии.

717. Первый член арифметической прогрессии (a_n) равен 4, а разность равна 0,4. Найдите: 1) a_3; 2) a_{11}; 3) a_{32}.

718. Первый член арифметической прогрессии (a_n) равен 17, а разность равна –2. Найдите: 1) a_4; 2) a_{15}; 3) a_{60}.

719. Найдите разность и двести первый член арифметической прогрессии 2,6; 2,9; 3,2; ... .

720. Чему равна разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 = -2$, $a_7 = 6$?

721. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_8 = 3$, $a_9 = -12$.

722. Найдите разность арифметической прогрессии (x_n), если $x_1 = 2$, $x_8 = -47$.

723. Найдите первый член арифметической прогрессии (y_n), если $y_{17} = 22$, а разность прогрессии $d = 0{,}5$.

724. Найдите формулу n-го члена арифметической прогрессии:
1) $-5, -7, -9, -11, \ldots$;
2) $2,\ 2\frac{1}{6},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{2}, \ldots$;
3) $a^2, 2a^2, 3a^2, 4a^2, \ldots$;
4) $a + 3, a + 1, a - 1, a - 3, \ldots$.

725. Является ли членом арифметической прогрессии (c_n):
1) число 20,4, если $c_1 = 11{,}4$, а разность прогрессии $d = 0{,}6$;
2) число 38, если $c_1 = 8$, а разность прогрессии $d = 1{,}4$?
В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

726. Найдите номер члена арифметической прогрессии 8,1; 8,5; 8,9; 9,3; ..., равного 13,7.

727. Найдите второй член арифметической прогрессии, если первый и третий члены равны соответственно –6 и 12.

728. Восьмой и десятый члены арифметической прогрессии равны соответственно 3,5 и 2,7. Чему равен девятый член прогрессии?

729. Найдите первый член арифметической прогрессии (b_n), если $b_5 = 11$, $b_{11} = -7$.

730. Чему равна разность арифметической прогрессии (x_n), если $x_8 = 58$, $x_{15} = 16$?

731. Как изменится разность конечной арифметической прогрессии, если переставить её члены в обратном порядке?

732. Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия 5,2; 4,9; 4,6; ... ?

733. Какой номер у первого положительного члена арифметической прогрессии –10,2; –9,5; –8,8; ... ?

734. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 7,2; 6,6; 6; ... .

735. Между числами –6 и 3 вставьте пять таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

736. Какие четыре числа надо вставить между числами 4 и –5, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию?

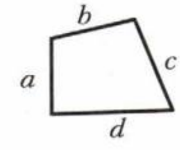
737. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если:
1) $a_3 + a_7 = 30$ и $a_6 + a_{16} = 60$;
2) $a_4 + a_{10} = 36$ и $a_5 \cdot a_{11} = 340$.

738. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если:
1) $a_5 + a_{12} = 41$ и $a_{10} + a_{14} = 62$;
2) $a_7 + a_{13} = -104$ и $a_2 \cdot a_6 = -240$.

739. В каких случаях для членов арифметической прогрессии выполняется равенство $a_1 a_4 = a_2^2$?

740. Докажите, что значения выражений $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Рис. 102



741. Верно ли утверждение: если длины сторон выпуклого четырёхугольника (рис. 102), взятые в последовательности a, b, d и c, образуют арифметическую прогрессию, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность?

742. Величины углов треугольника образуют арифметическую прогрессию. Какова градусная мера среднего по величине угла треугольника?

743. Является ли последовательность (a_n) арифметической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:

1) $a_n = -6n + 3$;
2) $a_n = 2n^2 - n$;
3) $a_n = -2{,}8n$;
4) $a_n = \frac{n}{n+1}$?

В случае утвердительного ответа укажите первый член и разность прогрессии.

744. Является ли последовательность (a_n) арифметической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:

1) $a_n = 6 + 7n$;
2) $a_n = \frac{2n-1}{5}$;
3) $a_n = \frac{1}{n} + 2$?

В случае утвердительного ответа укажите первый член и разность прогрессии.

745. Из арифметической прогрессии исключили члены с нечётными номерами. Образуют ли оставшиеся члены арифметическую прогрессию?

746. Даны две бесконечные арифметические прогрессии. Если из каждого члена одной прогрессии вычесть соответствующий член другой, то будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

747. Если из арифметической прогрессии, разность которой не равна нулю, исключить её члены, номера которых кратны трём, то будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

748. Каждый член арифметической прогрессии умножили на 4. Будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

749. Докажите, что числа, равные соответственно суммам углов треугольника, четырёхугольника, пятиугольника и т. д., образуют арифметическую прогрессию.

750. При каком значении x значения выражений $x^2 - 4$, $5x + 3$ и $3x + 2$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

751. При каком значении y значения выражений $y^2 + 1$, $y^2 + y$ и $8y - 10$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

752. При каком значении y значения выражений $y^2 - 2y$, $3y + 5$, $4y + 13$ и $2y^2 - y + 25$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

753. При каком значении x значения выражений $3x + 4$, $2x + 3$, x^2 и $2x^2 + x$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

754. Докажите, что если числа a, b и c – три последовательных члена арифметической прогрессии, то:

1) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$;

2) $\frac{2}{9}(a + b + c)^3 = a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)$.

755. Докажите, что если положительные числа a, b и c – три последовательных члена арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}.$$

756. Докажите, что если значения выражений $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ и $\frac{1}{a+b}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то значения выражений a^2, b^2 и c^2 также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Упражнения для повторения

757. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 46, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -4, \\ x^2 + 2y^2 = 12. \end{cases}$

758. Какое из данных неравенств равносильно неравенству $-5x < 10$:
1) $5x < -10$; 2) $10x > -20$; 3) $10x < -20$; 4) $5x > 10$?

759. Чему равно наименьшее целое решение неравенства
$3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) > -40$?

760. Упростите выражение:

1) $(2\sqrt{6} - 2\sqrt{54} + 6\sqrt{96}) \cdot 2\sqrt{3}$; 2) $(5\sqrt{20} - 6\sqrt{10} + 2\sqrt{40}) \cdot 3\sqrt{5}$.

761. Докажите, что если все цифры трёхзначного числа одинаковы, то это число кратно 37.

762. Рабочий должен был за определённый срок изготовить 216 деталей. Первые три дня он выполнял установленную ежедневную норму, а потом стал изготавливать ежедневно на 8 деталей сверх нормы. За один день до конца срока было изготовлено 232 детали. Сколько деталей в день должен был изготавливать рабочий в соответствии с нормой?

§ 23. Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Рассмотрим конечную арифметическую прогрессию a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.

Сумму членов этой прогрессии обозначим S_n.

Имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (*)$$

Выведем формулу для нахождения этой суммы.

Вначале рассмотрим задачу, решение которой подскажет, как вывести искомую формулу.

Рассмотрим арифметическую прогрессию

$$1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100$$

и найдём сумму её членов.

Запишем искомую сумму двумя способами и сложим полученные равенства:

$$\begin{array}{r} S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 \\ + \; S_{100} = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_{100} = \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{100\ \text{слагаемых}} \end{array}$$

Имеем:

$$2S_{100} = 101 \cdot 100; \; S_{100} = 5050.$$

Рассказывают, что выдающийся немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) придумал такое решение в возрасте пяти лет.

Карл Фридрих Гаусс

Воспользуемся описанным приёмом для нахождения суммы (*).

Запишем сумму S_n двумя способами. Вначале запишем сумму, первое слагаемое которой равно a_1, а каждое следующее слагаемое получено из предыдущего прибавлением разности d. Затем запишем сумму, первое слагаемое которой равно a_n, а каждое следующее слагаемое получено из предыдущего вычитанием разности d.

Имеем:

$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d),$

$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d).$

Сложив эти равенства, получим:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$

Выражение, записанное в правой части последнего равенства, является суммой n слагаемых, каждое из которых равно $a_1 + a_n$.

Тогда $2S_n = (a_1 + a_n)n$, т. е.

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Полученное равенство называют **формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии**.

Подставив в эту формулу вместо a_n выражение $a_1 + d\,(n - 1)$, получим:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n.$$

Отсюда

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n}$$

Последней формулой удобно пользоваться тогда, когда заданы первый член и разность прогрессии.

Пример 1. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 6.

Решение. Данные числа образуют арифметическую прогрессию, первый член которой $a_1 = 102$, а разность $d = 6$. Тогда $a_n = 102 + 6(n - 1) = 6n + 96$. Найдём количество членов этой прогрессии. Так как $a_n < 1000$, то искомое количество – это наибольшее натуральное решение неравенства $6n + 96 < 1000$. Имеем:

$$6n < 904;$$

$$n < 150\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $n = 150$. Теперь найдём искомую сумму

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6(150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82\,350.$$

Ответ: 82 350. ◄

Пример 2. Сумма семидесяти пяти первых членов арифметической прогрессии равна 450. Найдите тридцать восьмой член прогрессии.

Решение. Пусть первый член прогрессии и её разность равны a_1 и d соответственно. Тогда можно записать: $S_{75} = \frac{2a_1 + 74d}{2} \cdot 75 = 75(a_1 + 37d) = 450$. Поскольку $a_{38} = a_1 + 37d$, то искомый член равен $a_{38} = 450 : 75 = 6$.

Ответ: 6. ◄

1. Как найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если известны её первый и последний члены?
2. Как найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если известны её первый член и разность?

Упражнения

763. Чему равна сумма семи первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 9$ и $a_7 = 15$?

764. Чему равна сумма шести первых членов арифметической прогрессии (b_n), если $b_1 = 19$ и $b_6 = 14$?

765. Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = -6$ и $d = 4$.

766. Вычислите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии $-8, -6, -4, \ldots$.

767. Места в секторе цирка расположены так, что в первом ряду 6 мест, а в каждом следующем на 3 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в секторе, если в нём 16 рядов?

768. Дмитрий взял в библиотеке книгу. За первый день он прочитал 40 страниц, а за каждый следующий день читал на 10 страниц больше, чем за предыдущий. Сколько страниц в книге, если Дмитрий прочитал её за 7 дней?

769. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = -4n + 1$. Найдите сумму тридцати двух первых членов прогрессии.

770. Арифметическая прогрессия (c_n) задана формулой n-го члена $c_n = 5n - 2$. Найдите сумму двадцати шести первых членов прогрессии.

771. Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 6$, $a_9 = 22$; 2) $a_6 = 49$, $a_{20} = 7$.

772. Чему равна сумма сорока первых членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_8 = -14$, $x_{30} = -3$?

773. Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только количество целых часов от 1 до 12?

774. Найдите сумму двадцати пяти первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{10} = 44$, а разность прогрессии $d = 4$.

775. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 + a_8 - a_{14} = -17$ и $a_5 + a_{22} = 101$.

776. Найдите сумму тридцати трёх первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_3 + a_5 + a_{13} = 33$ и $a_{15} - a_8 - a_{10} = -1$.

777. При любом n сумму n первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 3n^2 + 5n$. Найдите три первых члена этой прогрессии.

778. При любом n сумму n первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 9n - 2n^2$. Найдите седьмой член этой прогрессии.

779. (*Старинная египетская задача.*) Сто мер хлеба надо разделить на пять человек так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвёртый больше третьего и пятый больше четвёртого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше, чем трое последних. Сколько надо дать каждому?

780. Чему равна сумма n первых:

1) натуральных чисел;

2) нечётных чисел?

781. Чему равна сумма n первых чётных чисел?

782. Какое натуральное число равно сумме всех предшествующих ему натуральных чисел?

783. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии −6,2; −5,9; −5,6; ... .

784. Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 8,4; 7,8; 7,2; ... .

785. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 5 и не больших 240.

786. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и меньших 130.

787. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 12 и меньших 200.

788. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 8.

789. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 7.

790. Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 8,5, а сумма шестнадцати первых членов составляет 172.

791. Найдите первый член арифметической прогрессии, разность которой равна −4, а сумма девяти первых членов составляет −54.

792. Первый член арифметической прогрессии равен −9, а разность равна 6. Сколько надо взять первых членов прогрессии, чтобы их сумма была равной 960?

793. Какое наименьшее количество последовательных нечётных натуральных чисел, начиная с числа 7, надо сложить, чтобы получить сумму, большую чем 315?

794. Может ли сумма каких-либо пяти последовательных членов арифметической прогрессии 3, 7, 11, ... быть равной 135? В случае утвердительного ответа найдите эти члены.

795. Может ли сумма каких-либо четырёх последовательных членов арифметической прогрессии 2, 8, 14, ... быть равной 176? В случае утвердительного ответа найдите эти члены.

796. При свободном падении тело за первую секунду проходит 4,9 м, а за каждую следующую – на 9,8 м больше, чем за предыдущую, если не учитывать сопротивление воздуха. Найдите время падения тела с высоты 490 м (не учитывая сопротивление воздуха).

797. Сумма нечётных номеров страниц книги является нечётным числом, большим 400 и меньшим 500. Сколько страниц в книге?

798. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с восьмого по двадцать шестой включительно, если первый член прогрессии равен 24, а разность прогрессии равна –8.

799. Найдите сумму членов арифметической прогрессии (x_n) с десятого по двадцать пятый включительно, если $x_1 = -3$ и $x_{11} = 12$.

800. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна 39, а сумма первых четырнадцати членов равна –77. Найдите первый член и разность прогрессии.

801. Первый член арифметической прогрессии равен 100, а сумма шести первых членов в 5 раз больше суммы следующих шести членов. Чему равна разность прогрессии?

802. Разность арифметической прогрессии равна 28, а сумма пяти первых членов в 4 раза меньше суммы следующих шести членов. Чему равен первый член прогрессии?

803. Двенадцатый член арифметической прогрессии равен 30. Найдите сумму двадцати трёх первых членов прогрессии.

804. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_5 + a_{10} + a_{12} + a_{15} = 50$.

805. Решите уравнение:

1) $7 + 13 + 19 + ... + (6n + 1) = 480$, где n – натуральное число;

2) $5 + 8 + 11 + ... + x = 124$, где x – натуральное число.

806. Решите уравнение:

1) $11 + 19 + 27 + ... + (8n + 3) = 470$, где n – натуральное число;

2) $1 + 5 + 9 + ... + x = 630$, где x – натуральное число.

807. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, у которой среднее арифметическое n первых членов при любом n равно их количеству.

808. (*Задача Гипсикла Александрийского*[1].) Докажите, что в арифметической прогрессии с чётным количеством членов, состоящей из целых чисел, сумма второй половины больше суммы первой половины на число, кратное квадрату половины количества членов.

809. Докажите, что если сумма n первых членов последовательности вычисляется по формуле $S_n = n^2 - 3n$, то эта последовательность является арифметической прогрессией. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

810. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые не делятся нацело ни на 3, ни на 5.

Упражнения для повторения

811. Постройте график функции:

1) $y = x^2 - 4x + 4$; 2) $y = 2x^2 + 8x + 8$.

Используя построенный график, найдите область значений, промежутки возрастания и убывания функции.

812. Вычислите:

1) $\frac{3^{49}}{9^{25}}$; 2) $\frac{4^8}{8^4}$; 3) $\frac{5^4 \cdot 11^7}{55^6}$; 4) $\frac{12^5}{18^3}$.

813. При каком значении k графики функций $y = kx - 3$ и $y = x^2$ пересекаются в точке, абсцисса которой равна -2?

814. Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{bc}}$; 2) $\frac{d - 49}{d + 12\sqrt{d} + 36} \cdot \frac{4\sqrt{d} + 24}{3\sqrt{d} + 21}$.

815. Велосипедист за каждую минуту проезжает на 600 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на дорогу в 120 км он тратит на 3 ч больше, чем мотоциклист. Найдите скорость велосипедиста.

Учимся делать нестандартные шаги

816. Найдите все пары $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = x^2 + y^2 + 2.$$

[1] Гипсикл Александрийский (II в. до н. э.) – древнегреческий учёный, автор XIV книги «Начал» Евклида.

§ 24. Геометрическая прогрессия

Рассмотрим последовательности:

$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots;$

$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots;$

$5; -0{,}5; 0{,}05; -0{,}005; 0{,}0005; \ldots .$

Они обладают следующей характерной особенностью: *каждый следующий член последовательности получен в результате умножения предыдущего члена на одно и то же число*. Для первой последовательности это число равно 3, для второй это число равно $\frac{1}{2}$, для третьей это число равно $-0{,}1$.

С подобными последовательностями можно встретиться, например, при изучении роста колонии бактерий; при ежемесячной оценке суммы денег на счёте, положенных в банк под проценты. Такие последовательности называют **геометрическими прогрессиями**.

Определение

Геометрической прогрессией называют последовательность с отличным от нуля первым членом, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

Число, равное отношению последующего и предыдущего членов последовательности, называют **знаменателем геометрической прогрессии** и обозначают буквой q (первой буквой французского слова *quotient* – «частное»).

Итак, если (b_n) – геометрическая прогрессия со знаменателем q, то

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \ldots,$$

т. е. для любого натурального n выполняется равенство $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Отсюда получаем рекуррентную формулу $b_{n+1} = b_n q$.

Следовательно, геометрическую прогрессию можно задать рекуррентно:

$$\boxed{b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n q}$$

Таким образом, *чтобы задать геометрическую прогрессию, надо указать её первый член и знаменатель*.

Приведём несколько примеров.

Если $b_1 = 1$ и $q = 3$, то получим геометрическую прогрессию, приведённую в начале параграфа:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots .$$

Если $b_1 = 2$ и $q = 2$, то получим геометрическую прогрессию – последовательность натуральных степеней числа 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots .$$

Заметим, что геометрическая прогрессия со знаменателем, равным 1, представляет собой последовательность, все члены которой равны. Так, последовательность 5, 5, 5, 5, ... является геометрической прогрессией, у которой $b_1 = 5$, $q = 1$. Вместе с тем эту последовательность можно рассматривать как арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 5$, $d = 0$.

Вообще, любая последовательность, все члены которой равны между собой и отличны от нуля, является одновременно и арифметической, и геометрической прогрессией. Последовательность 0, 0, 0, 0, ..., все члены которой равны нулю, является только арифметической прогрессией.

Покажем, как можно задать геометрическую прогрессию с помощью формулы n-го члена.

Из определения геометрической прогрессии следует:

$b_2 = b_1 \cdot q$;

$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2$;

$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 q^2) \cdot q = b_1 q^3$;

$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3) \cdot q = b_1 q^4$.

Эти примеры помогают подметить такую закономерность: чтобы найти некоторый член геометрической прогрессии, можно первый член умножить на степень с основанием q и показателем, на 1 меньшим, чем номер искомого члена. Отсюда, например, $b_6 = b_1 q^5$, $b_7 = b_1 q^6$, и вообще

$$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

Записанное равенство называют **формулой n-го члена геометрической прогрессии**.

Установим важное свойство членов геометрической прогрессии (b_n).

Имеем:

$\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2}$, отсюда $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$;

$\dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{b_4}{b_3}$, отсюда $b_3^2 = b_2 \cdot b_4$.

Вообще, для любого натурального n, большего 1, можно записать $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Отсюда

$$\boldsymbol{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Квадрат любого члена геометрической прогрессии, кроме первого (и последнего, если прогрессия конечна), равен произведению двух соседних с ним членов.

Если все члены геометрической прогрессии (b_n) положительны, то равенство $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ можно переписать так:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Следовательно, каждый член такой последовательности, кроме первого (и последнего, если последовательность конечна), является средним геометрическим двух соседних с ним членов.

Рассмотрим две последовательности.

Арифметическая прогрессия (a_n), у которой $a_1 = 1$, $d = 2$:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots .$$

Геометрическая прогрессия (b_n), у которой $b_1 = 1$, $q = 2$:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

У этих прогрессий равны первые члены. Обе эти последовательности конструируются с помощью одного и того же числа 2 ($d = q = 2$). Вместе с тем, сравнивая соответствующие члены, мы видим, что геометрическая прогрессия «растёт» гораздо быстрее, чем арифметическая. Например, в арифметической прогрессии $a_{20} = 1 + 2 \cdot 19 = 39$, в геометрической $b_{20} = 1 \cdot 2^{19} = 524\ 288$.

Вы знаете, что бактерии размножаются делением: одна бактерия делится на две. Теперь становится понятным, почему так быстро возрастает численность колонии бактерий, если их поместить в благоприятную среду.

Возможно, с этим примером связано то, что нередко в повседневной жизни, когда хотят подчеркнуть быстрый рост какой-либо величины, говорят «растёт в геометрической прогрессии».

Пример 1. В геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем $q = \frac{1}{3}$ найдите b_1, если $b_6 = \frac{5}{81}$.

Решение. Так как $b_6 = b_1 q^5$, то

$$b_1 = b_6 : q^5 = \frac{5}{81} : \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{5}{3^4} \cdot 3^5 = 5 \cdot 3 = 15.$$

Ответ: 15. ◄

Пример 2. Найдите четвёртый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 = 36$, $b_5 = 49$.

Решение. По свойству геометрической прогрессии $b_4^2 = b_3 b_5$, отсюда $b_4 = \sqrt{b_3 b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$ или $b_4 = -\sqrt{b_3 b_5} = -42$.

Если $b_4 = 42$, то получаем $q = b_4 : b_3 = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$; если $b_4 = -42$, то $q = -\frac{7}{6}$.

Ответ: $b_4 = 42$, $q = \frac{7}{6}$ или $b_4 = -42$, $q = -\frac{7}{6}$. ◄

Пример 3. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 + b_6 = 504$ и $b_4 - b_5 + b_6 = 378$.

Решение. Пусть q — знаменатель данной прогрессии. С учётом условия запишем систему двух уравнений с двумя переменными b_1 и q:

$$\begin{cases} b_1 q^2 + b_1 q^5 = 504, \\ b_1 q^3 - b_1 q^4 + b_1 q^5 = 378. \end{cases}$$

Поделим почленно левые и правые части уравнений системы:

$$\frac{b_1 q^2 (1 + q^3)}{b_1 q^3 (1 - q + q^2)} = \frac{504}{378}.$$

Далее получаем:

$$\frac{b_1 q^2 (1 + q)(1 - q + q^2)}{b_1 q^3 (1 - q + q^2)} = \frac{4}{3};$$

$$\frac{1 + q}{q} = \frac{4}{3};$$

$$4q = 3 + 3q;$$

$$q = 3.$$

Подставив значение q в первое уравнение системы, получаем: $9b_1 + 243b_1 = 504$; отсюда $252b_1 = 504$; $b_1 = 2$.

Ответ: $b_1 = 2$; $q = 3$. ◄

Пример 4. При каком значении x значения выражений $3x$, $7 - x$ и $5x + 7$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите эти числа.

Решение. Если значения выражений $3x$, $7 - x$ и $5x + 7$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, то должно выполняться равенство $(7 - x)^2 = 3x(5x + 7)$.

Далее получаем:

$$49 - 14x + x^2 = 15x^2 + 21x;$$

$$14x^2 + 35x - 49 = 0;$$

$$2x^2 + 5x - 7 = 0;$$

$$x = 1 \text{ или } x = -\frac{7}{2}.$$

Если $x = 1$, то получаем такую геометрическую прогрессию: 3, 6, 12.

Если $x = -\frac{7}{2}$, то получаем такую геометрическую прогрессию: $-\frac{21}{2}$, $\frac{21}{2}$, $-\frac{21}{2}$.

Ответ: при $x = 1$ имеем: 3, 6, 12; при $x = -\frac{7}{2}$ имеем: $-\frac{21}{2}$, $\frac{21}{2}$, $-\frac{21}{2}$. ◄

1. Какую последовательность называют геометрической прогрессией?
2. Какое число называют знаменателем геометрической прогрессии?
3. Какой вид имеет формула n-го члена геометрической прогрессии?
4. Как связаны между собой три последовательных члена геометрической прогрессии?

Упражнения

817. Среди данных последовательностей укажите геометрические прогрессии, первый член и знаменатель каждой из них:

1) 2, 6, 18, 36;
2) 4, 8, 16, 32;
3) 10, 20, 30, 40;
4) 81, 27, 9, 3;
5) 2, –2, 2, –2;
6) $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, –1, 2;
7) –9, –9, –9, –9;
8) 1, 2, 3, 5;
9) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4.

818. Шестой член геометрической прогрессии (b_n) равен 8, а знаменатель равен –4. Найдите седьмой член прогрессии.

819. Найдите седьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_8 = 16$, а знаменатель прогрессии $q = \frac{3}{4}$.

820. Чему равен знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 6$, $b_2 = -3$;
2) $b_7 = -9$, $b_8 = 15$;
3) $b_{10} = 3\sqrt{3}$, $b_{11} = 9$?

821. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_{12} = 24$, $b_{13} = 4$;
2) $b_4 = -\frac{2}{9}$, $b_5 = \frac{4}{15}$.

822. Чему равен первый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = 12$, а знаменатель прогрессии $q = \frac{1}{3}$?

823. Седьмой член геометрической прогрессии равен $\frac{1}{2}$, а её знаменатель равен 4. Найдите шестой член прогрессии.

824. Найдите четыре первых члена геометрической прогрессии (x_n), если $x_1 = 0{,}2$, а знаменатель прогрессии $q = -5$.

825. Первый член геометрической прогрессии равен $-\frac{1}{27}$, а знаменатель равен 3. Найдите пять первых членов прогрессии.

826. В геометрической прогрессии (y_n) первый член $y_1 = 64$, а знаменатель $q = -\frac{1}{2}$. Найдите:

1) y_3; 2) y_6; 3) y_{10}.

827. В геометрической прогрессии (c_n) первый член $c_1 = 9$, а знаменатель $q = -1$. Найдите:

1) c_{21}; 2) c_{50}.

828. Первый член геометрической прогрессии $b_1 = \frac{1}{125}$, а её знаменатель $q = 5$. Найдите:

1) b_4; 2) b_7.

829. Найдите знаменатель и пятый член геометрической прогрессии $\frac{1}{216}, \frac{1}{36}, \frac{1}{6}, \ldots$.

830. Найдите знаменатель и шестой член геометрической прогрессии 18, 12, 8, ...

831. Докажите, что если последовательность (x_n) – геометрическая прогрессия, то $x_3x_{13} = x_5x_{11}$.

832. Докажите, что если последовательность (y_n) – геометрическая прогрессия, то $y_4y_{21} = y_8y_{17}$.

833. Выразите члены b_8, b_{13} и b_{60} геометрической прогрессии (b_n) через b_7 и знаменатель q.

834. Выразите члены c_{18}, c_{36} и c_{50} геометрической прогрессии (c_n) через c_{12} и знаменатель q.

835. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_8 = 64$; 2) $b_6 = 75$, $b_8 = 27$.

836. Найдите первый член геометрической прогрессии (c_n), если:

1) $c_4 = \frac{1}{98}$, а знаменатель $q = \frac{2}{7}$; 2) $c_6 = 100$, $c_9 = 100\,000$.

837. Число 486 является членом геометрической прогрессии 2, 6, 18, ... Найдите номер этого члена.

838. Число 96 является членом геометрической прогрессии $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$. Найдите номер этого члена.

839. Какие два числа надо вставить между числами 6 и 750, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

840. Какие четыре числа надо вставить между числами 0,5 и 16, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

841. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = 5 \cdot 4^{n-2}$. Является ли эта последовательность геометрической прогрессией? В случае утвердительного ответа укажите её первый член и знаменатель.

842. Докажите, что последовательность (x_n), заданная формулой n-го члена $x_n = 7^{n+1}$, является геометрической прогрессией, и укажите её первый член и знаменатель.

843. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией. Найдите:

1) b_5, если $b_4 = 9$, $b_6 = 25$;
2) b_{20}, если $b_{19} = -3$, $b_{21} = -12$;
3) b_{17}, если $b_{16} = 2$, $b_{18} = 10$.

844. При каком значении переменной x числа x, $3x$ и 18 будут последовательными членами геометрической прогрессии?

845. При каком значении переменной y числа -1, $2y$ и -8 будут последовательными членами геометрической прогрессии?

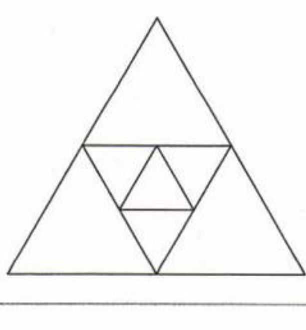
846. Второй член геометрической прогрессии равен 6. Найдите произведение трёх первых членов этой прогрессии.

847. Третий член геометрической прогрессии равен 3. Найдите произведение пяти первых членов этой прогрессии.

848. Докажите, что в конечной геометрической прогрессии произведение членов, равноудалённых от её концов, равно произведению крайних членов.

849. В правильный треугольник со стороной a последовательно вписаны треугольники так, что вершины каждого следующего треугольника являются серединами сторон предыдущего (рис. 103). Докажите, что периметры этих треугольников образуют геометрическую прогрессию, и запишите формулу n-го члена этой прогрессии.

Рис. 103



850. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) 2^{-n}, 2^{-2n}, 2^{-3n}, 2^{-4n};
2) 2^n, 2^{n^2}, 2^{n^3}, 2^{n^4};
3) 2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, 2^{n+3}?

В случае утвердительного ответа укажите знаменатель прогрессии.

851. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией со знаменателем q. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $b_1, b_3, ..., b_{2n-1}$;
2) $2b_1, 2b_2, ..., 2b_n$;
3) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, ..., b_{n-1} + b_n$;
4) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, ..., \frac{1}{b_n}$?

В случае утвердительного ответа укажите знаменатель прогрессии.

852. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией со знаменателем q. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $b_2, b_4, ..., b_{2n}$;
2) $b_1b_3, b_2b_4, b_3b_5, ..., b_{n-2}b_n$?

В случае утвердительного ответа укажите знаменатель прогрессии.

853. Между числами 80 и 5 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

854. Между числами 6 и 486 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

855. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_5 = 3b_3$ и $b_6 - b_2 = 48$;
2) $b_4 + b_7 = \frac{56}{9}$ и $b_5 - b_6 + b_7 = \frac{14}{9}$;
3) $b_5 - b_4 = 168$ и $b_3 + b_4 = -28$.

856. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_4 - b_2 = 30$ и $b_4 - b_3 = 24$;
2) $b_2 - b_5 = 78$ и $b_3 + b_4 + b_5 = -117$.

857. При каком значении x значения выражений $2x + 1$, $x + 5$ и $x + 11$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

858. При каком значении x значения выражений $x + 6$, $x + 2$ и $3x - 4$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

859. Докажите, что если члены последовательности (b_n) отличны от нуля и при любом натуральном $n > 1$ выполняется равенство $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, то последовательность (b_n) является геометрической прогрессией.

860. Найдите геометрическую прогрессию, содержащую шесть членов, если сумма трёх первых её членов равна 168, а сумма трёх последних равна 21.

861. Сумма трёх положительных чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 21. Если к этим числам прибавить соответственно 2, 3 и 9, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите данные числа.

862. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 30. Если из первого числа вычесть 5, из второго вычесть 4, а третье оставить без изменений, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите данные числа.

863. Сумма трёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 65. Если из первого из этих чисел вычесть 1, из третьего вычесть 19, а второе оставить без изменений, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите данные числа.

864. Сумма трёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 6 и 3, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите данные числа.

Упражнения для повторения

865. Найдите значение выражения:

1) $\frac{7^9}{7^{10}}$; 2) $\frac{125^3}{25^4}$; 3) $\frac{32^5}{64^4}$; 4) $\frac{39^8}{3^{10}\cdot 13^7}$.

866. Преобразуйте в дробь выражение:

1) $\frac{2}{x+y}+\frac{3}{x-y}$; 2) $\frac{a+1}{a-4}+\frac{a-1}{a-6}$; 3) $\frac{c-7}{c+1}-\frac{c-3}{c-5}$.

867. Докажите тождество:

$$\left(\frac{2b}{b^3+1}:\frac{1-b}{b^2-b+1}+\frac{2}{b-1}\right)\cdot\frac{b^2-2b+1}{4}:\frac{b-1}{b+1}=\frac{1}{2}.$$

868. Докажите, что значение выражения является рациональным числом:

1) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}-3}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}+3}$; 2) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}+\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$.

869. Трое работников выкопали картошку за 3 дня, работая ежедневно по 8 ч. За сколько дней её выкопают 6 работников, работая ежедневно по 6 ч, если производительность труда всех работников одинакова?

§ 25. Сумма n первых членов геометрической прогрессии

Рассмотрим конечную геометрическую прогрессию b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1}, b_n.

Сумму членов этой прогрессии обозначим S_n.

Имеем:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (*)$$

Выведем формулу для нахождения этой суммы.

Вначале рассмотрим задачу, решение которой подскажет, как вывести искомую формулу.

Рассмотрим геометрическую прогрессию $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{62}, 2^{63}$ и найдём сумму её членов S_{64}:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Умножим обе части записанного равенства на знаменатель прогрессии — число 2:

$$2S_{64} = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64}.$$

Найдём разность $2S_{64} - S_{64}$:

$$\begin{array}{rcl} 2S_{64} &=& \quad\; + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} + 2^{64} \\ - \quad S_{64} &=& 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} \\ \hline 2S_{64} - S_{64} &=& -1 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 2^{64}. \end{array}$$

Отсюда $S_{64} = 2^{64} - 1$.

У вас может возникнуть вопрос: почему в качестве примера мы выбрали именно прогрессию $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{62}, 2^{63}$?

С этой последовательностью связана старинная легенда. Индийский мудрец, придумавший шахматную игру, попросил у раджи за своё изобретение на первый взгляд скромное вознаграждение: за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зёрнышко, за вторую — 2, за третью — 4 и т. д.: за каждую следующую клетку вдвое больше зёрен, чем за предыдущую.

Понятно, что общее количество зёрен, которое попросил изобретатель, равно $S_{64} = 2^{64} - 1$.

Богатый раджа был потрясён, когда узнал, что он не в состоянии удовлетворить «скромное» желание мудреца. Дело в том, что значение выражения $2^{64} - 1$ равно 18 446 744 073 709 551 615.

Для того чтобы осознать, насколько велико это число, представим, что зерно хранят в амбаре площадью 12 га. Тогда его высота была бы больше расстояния от Земли до Солнца.

Воспользуемся описанным приёмом для нахождения суммы (*).

Перепишем равенство (*) так:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Найдём разность $S_nq - S_n$:

$$\begin{array}{rcl} S_nq &=& \quad\; + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n \\ - \quad S_n &=& b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1} \\ \hline S_nq - S_n &=& -b_1 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + b_1q^n. \end{array}$$

Следовательно, $S_n q - S_n = b_1 q^n - b_1$. Отсюда $S_n(q-1) = b_1(q^n - 1)$.
При $q \neq 1$ получаем:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Это равенство называют **формулой суммы n первых членов геометрической прогрессии** со знаменателем, не равным 1.

Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену. Тогда $S_n = nb_1$.

Пример. При любом натуральном n сумма n первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = 10(2^n - 1)$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

Решение. Пусть b_1 — первый член данной прогрессии, q — её знаменатель. Тогда $b_1 = S_1 = 10(2-1) = 10$; $b_1 + b_2 = S_2 = 10(2^2 - 1) = 30$. Отсюда $b_2 = 30 - b_1 = 20$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$.

Ответ: $b_1 = 10$, $q = 2$. ◄

1. Как найти сумму n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем, отличным от единицы?
2. Чему равна сумма n первых членов геометрической прогрессии, знаменатель которой равен единице?

Упражнения

870. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q, если:

1) $b_1 = 10$, $q = 3$, $n = 4$;
2) $b_1 = -4$, $q = -1$, $n = 10$;
3) $b_1 = 0{,}6$, $q = 2$, $n = 5$;
4) $b_1 = 4{,}5$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$;
5) $b_1 = -9$, $q = \sqrt{3}$, $n = 6$;
6) $b_1 = 8$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 4$.

871. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q, если:

1) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$;
2) $b_1 = 15$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 3$;
3) $b_1 = 18$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 5$;
4) $b_1 = 4$, $q = -\sqrt{2}$, $n = 4$.

872. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии:

1) 12, 72, 432, ...; 2) $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ...

873. Найдите сумму четырёх первых членов геометрической прогрессии:
1) –0,6; 3; –15; ...; 2) 56; 42; 31,5; ... .

874. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии (c_n), если:
1) $c_4 = 216$, а знаменатель прогрессии $q = -3$;
2) $c_1 = 5\sqrt{5}$, $c_5 = 125\sqrt{5}$, а знаменатель прогрессии $q > 0$.

875. Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии (x_n), если $x_3 = 24$, $x_8 = 768$.

876. Геометрическая прогрессия (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = 10 \cdot 3^{n-1}$. Найдите сумму пяти первых членов прогрессии.

877. Геометрическая прогрессия (y_n) задана формулой n-го члена $y_n = \frac{(-2)^{n+1}}{20}$. Найдите сумму десяти первых членов прогрессии.

878. Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{2}{3}$, а сумма четырёх первых членов равна 65. Найдите первый член прогрессии.

879. Сумма трёх первых членов геометрической прогрессии равна 516, а первый член равен 12. Найдите знаменатель прогрессии.

880. (*Задача из «Теоретического и практического курса чистой математики» Е. Войтяховского*[1].) Воину дана награда за первую рану 1 к., за вторую – 2 к., за третью – 4 к. и т. д. После подсчёта оказалось, что воин получил награду в сумме 655 р. 35 к. Спрашивается количество его ран.

881. Сумма членов конечной геометрической прогрессии равна 605. Найдите количество членов прогрессии, если её первый член $b_1 = 5$, а знаменатель прогрессии $q = 3$.

882. Бактерия, попав в благоприятную среду, в конце двадцатой минуты делится на две бактерии, каждая из которых в конце следующих 20 мин делится снова на две и т. д. Сколько бактерий получится из одной бактерии в течение суток?

883. При любом n сумма n первых членов геометрической прогрессии $S_n = 4(3^n - 1)$. Найдите третий член этой прогрессии.

[1] Войтяховский Ефим (ум. около 1812) – российский математик-педагог. Его «Теоретический и практический курс чистой математики» выдержал много изданий и в течение 40 лет был одним из самых распространённых пособий для школ того времени.

884. При любом n сумма n первых членов геометрической прогрессии $S_n = 6\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$. Найдите четвёртый член этой прогрессии.

885. Найдите сумму квадратов шести первых членов геометрической прогрессии, первый член которой равен $2\sqrt{3}$, а знаменатель равен $\sqrt{3}$.

886. Найдите сумму кубов четырёх первых членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 3$ и $b_2 = -6$.

887. Докажите тождество $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$.

888. Докажите тождество $a^{2n+1} + 1 = (a + 1)(a^{2n} - a^{2n-1} + \dots + a^2 - a + 1)$.

889. Найдите количество членов конечной геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = 3$, последний член $c_n = 162$, а сумма всех членов $S_n = 242$.

Упражнения для повторения

890. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases}(x+2)(x-6) \le (x+2)(x+1)+4, \\ 2(6x-1) \ge 7(2x-4);\end{cases}$

2) $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-2}{3} \ge \dfrac{x-3}{4} - x, \\ 1 - x > 0{,}5x - 5.\end{cases}$

891. Найдите промежуток возрастания функции:

1) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$;

2) $f(x) = -3x^2 - 2x + 4$.

892. Постройте график функции:

1) $y = -\frac{6}{x} + 3$; 2) $y = -\frac{6}{x+3}$; 3) $y = -\frac{6}{x+3} + 3$.

893. В первый день двое рабочих изготовили 90 деталей. Во второй день первый рабочий изготовил деталей на 10 % больше, а второй – на 15 % больше, чем в первый день. Всего во второй день они изготовили 101 деталь. Сколько деталей изготовил каждый из них в первый день?

894. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{16a^2}$, если $a < 0$ и $b > 0$;

2) $\sqrt{(x-y)^2} - \sqrt{9y^2}$, если $x > 0$ и $y < 0$.

Учимся делать нестандартные шаги

895. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторой квадратичной функции. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одной квадратичной функции.

§ 26. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше 1

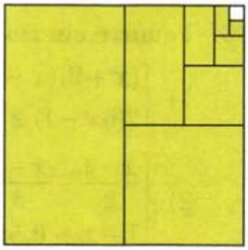
До сих пор мы рассматривали суммы, состоящие из конечного числа слагаемых. Однако при решении некоторых задач приходится рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых.

Даже само словосочетание «сумма бесконечного числа слагаемых» может вызывать недоумение, ведь нельзя сложить бесконечно много чисел – такой процесс никогда не завершится.

Проиллюстрируем на примере, как в математике решают такую проблему.

Рассмотрим квадрат со стороной 1 и разделим его на две равные части (рис. 104). Одну из частей закрасим, а незакрашенную вновь разделим на две равные части. Снова одну из них закрасим, а другую разделим на две равные части и т. д.

Рис. 104



После первого шага площадь закрашенной фигуры будет равна $S_1 = \frac{1}{2}$.

После второго шага: $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

После третьего шага: $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ и т. д.

...

После n-го шага: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

Используя формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии, устанавливаем, что после n-го шага площадь закрашенной фигуры будет равна

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Так как площадь квадрата равна 1, то из этой формулы следует, что площадь незакрашенной части равна $\frac{1}{2^n}$.

Действуя по описанному алгоритму, мы никогда не сможем закрасить квадрат целиком. Но чем больше шагов мы сделаем, тем меньше площадь закрашенной части будет отличаться от площади данного квадрата, а площадь незакрашенной части всё меньше будет отличаться от нуля. В таком случае говорят, что площадь закрашенной части **стремится** к площади квадрата.

Этот факт подтверждает формула $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ для нахождения площади закрашенной части квадрата после n-го шага.

Действительно, при увеличении количества шагов (увеличении числа n) значение дроби $\frac{1}{2^n}$ (площадь незакрашенной фигуры) стремится к нулю, а следовательно, значение разности $1 - \frac{1}{2^n}$ стремится к 1, т. е. к площади квадрата.

В таких случаях говорят, что сумма n первых членов геометрической прогрессии $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... при неограниченном увеличении n стремится к числу 1. Число 1 называют **суммой бесконечной геометрической прогрессии** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... и записывают

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1.$$

Обобщим рассмотренный пример.

Рассмотрим произвольную бесконечную геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, у которой $|q| < 1$.

Сумма n первых её членов вычисляется по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Можно записать:

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Имеем:

$$S_n = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Если $|q| < 1$, то при неограниченном увеличении числа n степень q^n стремится к нулю. При этом произведение $\frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$ также стремится к нулю. Следовательно, при неограниченном увеличении n сумма S_n стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$.

Число $\frac{b_1}{1-q}$ называют **суммой бесконечной геометрической прогрессии** (b_n), у которой $|q| < 1$, и записывают:

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = \frac{b_1}{1-q}.$$

Если сумму бесконечной геометрической прогрессии обозначить буквой S, то можно записать такую формулу:

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}}$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию 1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ..., у которой $q = 2$, т. е. $|q| > 1$.

В предыдущем параграфе мы убедились, что уже сумма её первых 64 членов — огромное число. Понятно, что при неограниченном увеличении n сумма n первых членов этой прогрессии не стремится ни к какому числу. В этом случае говорят, что рассматриваемая бесконечная прогрессия суммы не имеет. Вообще, о сумме бесконечной геометрической прогрессии можно говорить только тогда, когда $|q| < 1$.

Вы знаете, что каждое рациональное число, т. е. дробь вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное, можно представить в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Например, $\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{5}{11} = 0,454545...$, т. е. $\frac{5}{11} = 0,(45)$.

Вы умеете представлять конечную десятичную дробь в виде обыкновенной дроби. Например, $0,625 = \frac{625}{1000}$. Сократив эту дробь на 125, получим $\frac{5}{8}$.

Однако вы ещё не умеете представлять бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби. Покажем на примере, как можно решить эту задачу с помощью понятия суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Рассмотрим бесконечную периодическую десятичную дробь 0,(45).

Представим это число в виде суммы:

$0,(45) = 0,454545... = 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + ...$.

Слагаемые 0,45; 0,0045; 0,000045; ... являются членами бесконечной геометрической прогрессии (b_n), у которой $b_1 = 0{,}45$, $q = 0{,}01$. Так как $|q| < 1$, то можем найти сумму этой бесконечной прогрессии:

$$S = \frac{0{,}45}{1-0{,}01} = \frac{0{,}45}{0{,}99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

Поэтому $0{,}(45) = \frac{5}{11}$.

Пример 1. Представьте бесконечную десятичную дробь 0,2(54) в виде обыкновенной дроби.

Решение. Имеем:

$0{,}2(54) = 0{,}2545454... = 0{,}2 + 0{,}0545454... = 0{,}2 + 0{,}054 + 0{,}00054 + 0{,}0000054 + ...$.

Бесконечную периодическую десятичную дробь 0,0545454... можно рассматривать как сумму бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой равен $b_1 = 0{,}054$, а знаменатель $q = 0{,}01$. Тогда

$$0{,}0545454... = \frac{0{,}054}{1-0{,}01} = \frac{0{,}054}{0{,}99} = \frac{54}{990} = \frac{3}{55}.$$

Отсюда $0{,}2(54) = 0{,}2 + 0{,}0(54) = 0{,}2 + \frac{3}{55} = \frac{1}{5} + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}$.

Ответ: $\frac{14}{55}$. ◄

Пример 2. Дан правильный треугольник со стороной a. Из высот этого треугольника построен второй правильный треугольник, из высот второго построен третий треугольник и т. д. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех треугольников.

Решение. Высота правильного треугольника со стороной a равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, высота правильного треугольника со стороной $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ равна $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$ и т. д. Тогда периметры данных треугольников образуют последовательность $3a$, $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{9a}{4}$, ..., являющуюся геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{\sqrt{3}}{2}$, меньшим 1. Следовательно, сумму периметров P можно вычислить по формуле $P = \frac{3a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Отсюда

$$P = \frac{6a}{2-\sqrt{3}} = \frac{6a(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 6a(2+\sqrt{3}).$$

Площадь правильного треугольника со стороной a равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; площадь правильного треугольника со стороной $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ равна $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4}$; площадь правильного треугольника со стороной $\frac{3a}{4}$ равна $\left(\frac{3a}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ и т. д. Следовательно, площади данных треугольников образуют последовательность, являющуюся геометрической прогрессией с первым членом $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и знаменателем $\frac{3}{4}$. Следовательно, сумму площадей S можно вычислить по формуле $S = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}}$. Отсюда $S = a^2\sqrt{3}$.

Ответ: $6a(2+\sqrt{3})$; $a^2\sqrt{3}$. ◄

Что называют суммой бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы?

Упражнения

896. Вычислите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q, если:

1) $b_1 = 24$, $q = \frac{3}{4}$;
2) $b_1 = -84$, $q = -\frac{1}{3}$;
3) $b_1 = 63$, $q = -\frac{1}{6}$;
4) $b_1 = -81$, $q = -\frac{2}{7}$.

897. Вычислите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q, если:

1) $b_1 = 15$, $q = \frac{2}{3}$;
2) $b_1 = 18$, $q = -\frac{1}{4}$.

898. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

1) 10; 1; 0,1; ...;
2) 0,3; 0,03; 0,003; ...;
3) 6; −3; 1,5; ... .

899. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

1) 64, 24, 9, ...;
2) −396, 330, −275, ...

900. Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,1111...;
2) 0,(5);
3) 0,(24);
4) 0,416416416...;
5) 0,2666...;
6) 0,6252525...;
7) 1,181818...;
8) 2,3(36).

901. Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,222...;
2) 0,666...;
3) 0,(28);
4) 0,1777...;
5) 3,454545...;
6) 1,4(12).

902. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

1) $\sqrt{2}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots;$
2) $3\sqrt{3}, 3, \sqrt{3}, \ldots;$
3) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \ldots .$

903. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

1) $\sqrt{\frac{3}{2}}, 1, \sqrt{\frac{2}{3}}, \ldots;$
2) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \ldots .$

904. Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, сумма которой равна 63, а знаменатель равен $\frac{4}{9}$.

905. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна –60, а её первый член равен –65. Найдите знаменатель прогрессии.

906. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_3 = 4$, $b_5 = 2$;
2) $b_1 + b_3 = 20$, $b_2 + b_4 = \frac{20}{3}$.

907. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_2 = 54$, $b_5 = 2$;
2) $b_2 - b_4 = 48$, $b_1 - b_3 = 240$.

908. (*Задача Ферма́.*) Покажите, что если S является суммой бесконечной геометрической прогрессии (b_n), то $\frac{S}{S - b_1} = \frac{b_1}{b_2}$.

909. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 2, а сумма четырёх её первых членов равна $1\frac{7}{8}$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

910. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 256, а сумма трёх её первых членов равна 252. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

911. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 b_4 = 36$ и $b_3 + b_5 = 8$.

912. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (c_n), если $c_3 c_5 = 20$ и $c_2 + c_4 = 12\sqrt{5}$.

913. Решите уравнение:

1) $1 + x + x^2 + \ldots = 4$, если $|x| < 1$;

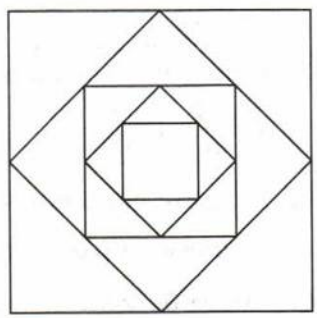
2) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \ldots = 1{,}5$, если $|x| > 1$.

914. Решите уравнение $1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{16}{17}$, если $|x| < 1$.

915. Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой в 1,5 раза больше суммы остальных её членов.

916. Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, сумма двух первых членов которой в 8 раз больше суммы остальных её членов.

Рис. 105



917. В квадрат со стороной a вписан квадрат, вершинами которого являются середины сторон первого квадрата, во второй квадрат вписан третий, вершинами которого являются середины сторон второго, и т. д. (рис. 105). Найдите сумму площадей всех квадратов.

918. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник, в треугольник вписана окружность, в эту окружность вписан правильный треугольник и т. д. Найдите сумму:

1) периметров всех треугольников; 2) площадей треугольников; 3) длин окружностей; 4) площадей кругов, ограниченных данными окружностями.

919. В квадрат со стороной a вписана окружность, в окружность вписан квадрат, в этот квадрат вписана окружность, в которую снова вписан квадрат, и т. д. Найдите сумму:

1) периметров всех квадратов; 2) площадей квадратов; 3) длин окружностей; 4) площадей кругов, ограниченных данными окружностями.

920. Постройте график функции $y = x^2 + \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} + \ldots$, где $x \neq 0$.

921. Постройте график функции $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})^2} + \ldots$, где $x > 0$.

Упражнения для повторения

922. Решите неравенство:
1) $5x^2 - 11x + 2 \le 0$;
2) $4x^2 + 3{,}6x > 0$;
3) $12 - 5x - 3x^2 \le 0$;
4) $0{,}04 - x^2 > 0$.

923. Разложите на множители:
1) $6ab^2 - 12ab^3$;
2) $2a^3 - 8a$;
3) $3a^2c - 3c^3$;
4) $18mn^2 + 27m^2n$;
5) $100x^2 - 1$;
6) $2y^2 - 12y + 18$.

924. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:
1) $\dfrac{a}{2a - \sqrt{7b}}$;
2) $\dfrac{p - 3}{\sqrt{4 - p} - 1}$;
3) $\dfrac{m}{m + \sqrt{n}}$;
4) $\dfrac{1}{\sqrt{a - 3} + 2}$;
5) $\dfrac{7}{3 - \sqrt{b + 2}}$.

925. При каком значении b графики функций $y = 8x + b$ и $y = x^2$ пересекаются в точке, принадлежащей оси ординат?

Учимся делать нестандартные шаги

926. Глеб задумал пять цифр: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Игорь отгадывает их. Ему разрешено задавать вопросы вида: «Чему равна сумма $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5$?», где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – некоторые натуральные числа. За какое наименьшее количество вопросов Игорь может отгадать задуманные Глебом цифры?

Задание № 6 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Среди данных последовательностей укажите арифметическую прогрессию.

А) 6, 9, 12, 13
Б) 2, 9, 16, 23
В) 2, 8, 14, 21
Г) 2, 9, 16, 21

2. Какая из данных последовательностей является геометрической прогрессией?

А) 3, 6, 9, 12
Б) 3, 5, 7, 14
В) 3, 6, 12, 24
Г) 5, 8, 12, 16

3. Чему равен шестой член арифметической прогрессии, первый член которой равен 12, а разность равна 0,4?

А) 14,4 Б) 14 В) 13,6 Г) 13

4. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -7$, $a_2 = 5$.

А) –2 Б) 2 В) –12 Г) 12

5. Вычислите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии, первый член которой $a_1 = -16$, а разность $d = 3$.

А) –10 Б) –15 В) –20 Г) –25

6. Найдите четвёртый член геометрической прогрессии, первый член которой $b_1 = -\frac{1}{8}$, а знаменатель $q = -2$.

А) –2 Б) –1 В) 1 Г) 2

7. Чему равен знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 36$, $b_2 = 9$?

А) $\frac{1}{4}$ Б) 4 В) 27 Г) –27

8. Вычислите сумму четырёх первых членов геометрической прогрессии, первый член которой $b_1 = 2$, а знаменатель $q = 3$.

А) 56 Б) 80 В) 96 Г) 192

9. Найдите сумму пятнадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), заданной формулой n-го члена $a_n = -4n + 13$.

А) –300 Б) –285 В) –275 Г) –250

10. Какой номер члена арифметической прогрессии (a_n), равного 6,2, если $a_1 = 0{,}2$, а разность $d = 0{,}4$?

А) 14 Б) 15 В) 16 Г) 17

11. Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия (a_n), если $a_1 = 41$ и $a_2 = 38$?

А) 13 Б) 14 В) 15 Г) 16

12. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 + a_5 = 28$ и $a_2 + a_3 = 24$.

А) 4 Б) 3 В) 2,5 Г) 2

13. Чему равна сумма бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = 24$, $b_5 = -3$?

А) 24 Б) 48 В) −96 Г) −32

14. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 0,(27).

А) $\frac{3}{11}$ Б) $\frac{9}{11}$ В) $\frac{27}{100}$ Г) $\frac{3}{111}$

15. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 9 и меньших 120.

А) 810 Б) 702 В) 819 Г) 882

16. Чему равна сумма девяти первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 + a_4 + a_{10} = 18$?

А) 48 В) 72

Б) 54 Г) найти невозможно

17. При каком значении x значения выражений $7x - 8$, $2x + 1$ и $x + 6$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

А) 1 В) −1

Б) 2 Г) такого значения не существует

18. При каком положительном значении x значения выражений $x + 1$, $3x - 1$ и $2x + 10$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

А) 1,5 В) 3

Б) 4 Г) такого значения не существует

Итоги главы 4

Последовательность

Объекты, которые пронумерованы подряд натуральными числами 1, 2, 3, ..., n, ..., образуют последовательности.

Арифметическая прогрессия

Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом, называют арифметической прогрессией.

Рекуррентный способ задания арифметической прогрессии

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$$

Формула n-го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Свойство членов арифметической прогрессии

Любой член арифметической прогрессии, кроме первого (и последнего, если прогрессия конечна), равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;\ S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называют последовательность с отличным от нуля первым членом, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

Формула n-го члена геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Свойство членов геометрической прогрессии

Квадрат любого члена геометрической прогрессии, кроме первого (и последнего, если прогрессия конечна), равен произведению двух соседних с ним членов: $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше 1

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Упражнения для повторения курса алгебры 9 класса

927. Докажите неравенство:

1) $(2b-1)(3b+2) < (3b-1)(2b+1)$;
2) $25m^2 + n^2 \geq 10mn$;
3) $2a^2 - 4a + 5 > 0$;
4) $x^2 + x + 1 > 0$;
5) $4y^2 - 12 \geq 12y - 21$;
6) $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$;
7) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$;
8) $2a^2 + 5b^2 + 2ab + 1 > 0$;
9) $x^2 + y^2 + 15 > 6x + 4y$.

928. Докажите, что неравенство является верным:

1) $a^5 - 5 \geq 5a^4 - a$, если $a \geq 5$;
2) $b^3 + b + 2 \geq 0$, если $b \geq -1$;
3) $c^3 + c \leq 3c^2 + 3$, если $c \leq 3$.

929. Известно, что $a > 3$. Сравните с нулём значение выражения:

1) $2a - 6$; 3) $2a - 4$; 5) $\frac{a-2}{a-1}$;

2) $15 - 5a$; 4) $(a-3)(2-a)$; 6) $\frac{-4}{3-a}$.

930. Известно, что $b < 2$. Сравните с нулём значение выражения:

1) $4b - 8$; 2) $(b-2)^2(b-3)$; 3) $\frac{b-3}{(2-b)(b-4)}$.

931. Докажите, что если $a > b > 1$, то $a^2b + b^2 + a > ab^2 + a^2 + b$.

932. Докажите, что если $a < b < 2$, то $a^2b + 2b^2 + 4a < ab^2 + 2a^2 + 4b$.

933. Сравните с нулём число a, если:

1) $6a < 5a$; 3) $9a > 4a$;
2) $-2a < 2a$; 4) $-37a > -3a$.

934. Докажите, что если $a > 7$ и $b > 3$, то:

1) $4a + b > 31$; 2) $10a + 3b > 75$.

935. Докажите, что если $a > 5$ и $b < -2$, то:

1) $3a - b > 17$; 2) $5b - 2a < -10$.

936. Сравните, если возможно:

1) $4a + b$ и 12, если $a > 2$ и $b > 5$;
2) $b - 2a$ и 0, если $a > 4$ и $b < 6$;
3) $b - 3a$ и 1, если $a < 6$ и $b < 0$;
4) $a - 5b$ и 1, если $a < 12$ и $b > 2$.

937. Положительные числа a, b, c и d таковы, что $a > b$, $d < b$ и $c > a$. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{d}$.

938. Известно, что $5 < a < 8$. Оцените значение выражения:
1) $0{,}4a$; 2) $a - 3$; 3) $2a + 1$; 4) $-3a + 2$.

939. Известно, что $3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$. Оцените значение выражения:
1) $2\sqrt{10}$; 2) $-4\sqrt{10}$; 3) $3\sqrt{10} - 5$.

940. Известно, что $3 < m < 4$ и $-3 < n < -2$. Оцените значение выражения:
1) $2m + 3n$; 2) $0{,}2m - n$; 3) $-5m + 4n$; 4) $m - \frac{m}{n}$.

941. Решите неравенство:
1) $16 - 4n \ge 8$; 3) $6x + 3 > 5x - 2$; 5) $3x + 4 < 5x - 4$;
2) $10x > 13x + 6$; 4) $\frac{4 - 3x}{7} < 1$; 6) $4x - 7 > 7x - 6$.

942. Найдите сумму натуральных чисел, принадлежащих области определения функции $y = \sqrt{10 - 3x}$.

943. Дана функция $f(x) = 3x + 12$. При каких значениях аргумента функция принимает:
1) положительные значения;
2) отрицательные значения;
3) значения, принадлежащие промежутку $[-4; 7]$?

944. Придумайте неравенство вида $ax + b > 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, множеством решений которого является:
1) промежуток $(-3; +\infty)$;
2) промежуток $(-\infty; 1{,}6)$;
3) множество действительных чисел;
4) пустое множество.

945. Найдите множество решений неравенства:
1) $(2x - 3)^2 \le (4x - 1)(x - 2) + 7$;
2) $(x - 2)(2 + x) \ge 2 - (x + 4)(1 - x)$;
3) $\frac{1 - x}{2} + 3 < 3x - \frac{2x + 1}{4}$;
4) $\frac{3x - 37}{2} - 9 > \frac{7 - 2x}{4} + 2x$;
5) $\frac{5x - 3}{5} \ge \frac{3x + 4}{3} - \frac{29}{15}$.

946. Чему равно наименьшее целое решение неравенства
$\frac{3x + 5}{4} - 1 \le \frac{x - 2}{3} + x$?

947. Чему равно наибольшее целое решение неравенства $\frac{3x + 5}{2} < \frac{8 - x}{3}$?

948. Равносильны ли неравенства:

1) $\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{3}<1$ и $3(x+1)+2(x-1)<1$;

2) $(x+3)(x^2+4)>0$ и $x+3>0$;

3) $x-1>3$ и $x-1+\frac{1}{x-5}>3+\frac{1}{x-5}$;

4) $x+2<1$ и $x+2+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{x}$?

949. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x-3<2x-3, \\ 4x+5>10-x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9+2x\le 3x+7, \\ x-2>2x-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-5)^2-15\ge (x-3)(x-4)-50, \\ 4(x+7)-16\ge 2-x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x-1}{4}+\frac{x+1{,}7}{3}\ge \frac{3x+1}{5}, \\ \frac{x+2}{4}-\frac{x+8}{5}<\frac{3x-1}{10}. \end{cases}$

950. Найдите сумму целых решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} 3x-5<23-4x, \\ 7x-9\le 9x+1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(3x-4)<3(4x-5)+23, \\ 4(x+1)\le 3x+5. \end{cases}$

951. Придумайте систему двух линейных неравенств с одной переменной, множеством решений которой является:

1) промежуток $(-2; +\infty)$;

2) промежуток $\left[-4; \frac{1}{3}\right]$;

3) промежуток $(-\infty; -10]$;

4) пустое множество;

5) множество, состоящее из одного числа 8;

6) множество действительных чисел.

952. Известно, что $1\le a\le 4$. Сколько целых значений может принимать выражение $0{,}5a-3$?

953. Решите двойное неравенство:

1) $-3\le 2x-1<5$;

2) $-1<3x-9\le 6$;

3) $2<7-4x<11$;

4) $-2\le \frac{1-x}{3}\le 1$.

954. При каких значениях a система неравенств имеет хотя бы одно решение:

1) $\begin{cases} x<4, \\ x>a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\le 2, \\ x>a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\le -3, \\ x\ge a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\ge 1, \\ x\le a? \end{cases}$

955. При каких значениях a система неравенств не имеет решений:

1) $\begin{cases} x < 6, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \le 5, \\ x > a; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \le -8, \\ x \ge a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x > 0, \\ x \le a? \end{cases}$

956. При каких значениях a множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x \ge 3, \\ x > a \end{cases}$ является:

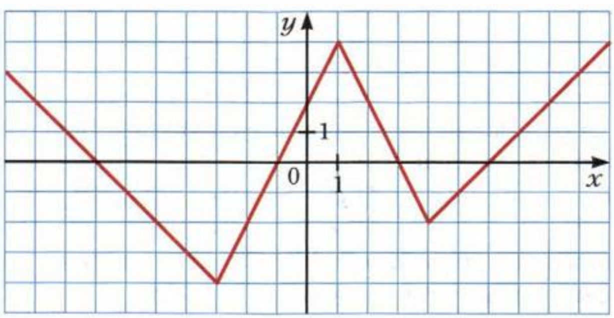
1) промежуток $[7; +\infty)$;
2) промежуток $[3; +\infty)$;
3) промежуток $(-2; +\infty)$;
4) пустое множество?

957. При каких значениях a уравнение $x^2 - (2a + 2)x - 2a - 3 = 0$ имеет два различных отрицательных корня?

958. При каких значениях a уравнение $x^2 - (2a - 1)x + a^2 - a - 6 = 0$ имеет два различных корня, принадлежащих промежутку $[-3; 2]$?

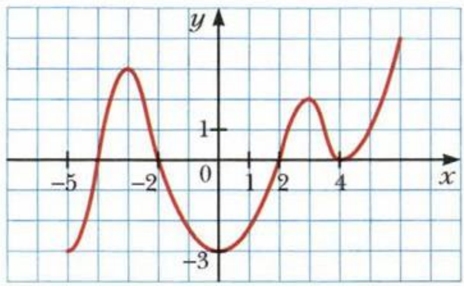
959. На рисунке 106 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Пользуясь рисунком, укажите:
1) нули функции;
2) промежутки возрастания и убывания функции;
3) множество решений неравенства $f(x) > 0$.

Рис. 106



960. На рисунке 107 изображён график функции $y = g(x)$, определённой на промежутке $[-5; 6]$. Пользуясь рисунком, укажите:
1) область значений функции;
2) нули функции;
3) промежутки возрастания и убывания функции;
4) множество решений неравенства $g(x) \le 0$.

Рис. 107



961. Укажите, какие из данных линейных функций являются возрастающими, а какие — убывающими:

1) $y = -4x$; 2) $y = 4x - 7$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 4) $y = 4 - x$.

962. Какая из данных функций является убывающей:

1) $y = x^2$; 2) $y = \frac{2}{x}$; 3) $y = -2x$; 4) $y = 2x$?

963. Решите графически уравнение:

1) $(x + 1)^2 = -\frac{2}{x}$; 3) $\sqrt{x+1} = 5 - x$; 5) $(x + 2)^2 = \sqrt{x} + 4$;

2) $x^2 - 2 = -\sqrt{x}$; 4) $\frac{6}{x-2} = x + 3$; 6) $\frac{5}{x} + 3 = (x - 3)^2$.

964. Чему равна абсцисса вершины параболы:

1) $y = 4x^2 - 12x + 1$; 2) $y = -0{,}2x^2 - 2x + 3$?

965. Укажите, вершина какой из данных парабол принадлежит оси ординат, а какой — оси абсцисс:

1) $y = x^2 - 4x + 3$; 3) $y = x^2 - 6x + 9$;
2) $y = x^2 - 8$; 4) $y = x^2 + 2x$.

966. Найдите значения b и c, при которых функция $y = x^2 + bx + c$:

1) имеет единственный нуль в точке $x = -3$;
2) принимает наименьшее значение, равное 4, в точке $x = 0$;
3) имеет нули в точках $x = -2$ и $x = 5$.

967. Постройте график данной функции, найдите её область значений, промежутки возрастания и убывания:

1) $y = -2x^2 + 1$; 5) $y = -x^2 + 4x - 3$;
2) $y = 0{,}5x^2 - 2$; 6) $y = x^2 - 4x + 5$;
3) $y = x^2 + 6x + 5$; 7) $y = 2x^2 - 3x - 2$;
4) $y = 4x - x^2$; 8) $y = -3x^2 + 8x + 3$.

968. При каком значении c график функции $y = x^2 - 6x + c$:

1) проходит через начало координат;

2) имеет с осью абсцисс только одну общую точку;

3) пересекает ось ординат в точке $A(0; -4)$;

4) пересекает ось абсцисс в точке $B(2; 0)$?

969. При каком значении b график функции $y = x^2 + bx + 2$:

1) имеет с осью абсцисс только одну общую точку;

2) не имеет с осью абсцисс общих точек;

3) пересекает ось абсцисс в точках, расстояние между которыми равно 4?

970. График функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $A(1; 1)$ и $B(2; 2)$. Проходит ли этот график через точку:

1) $C(-1; -1)$; 2) $D(3; 5)$?

971. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку $(0; 10)$, а её вершиной является точка $(6; -2)$. Найдите коэффициенты a, b и c.

972. Значение квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ в точке $x = -1$ равно 0, а при $x = \frac{1}{4}$ функция принимает наименьшее значение, равное $-\frac{25}{8}$. Найдите коэффициенты a, b и c.

973. При каком значении m:

1) наименьшее значение функции $y = x^2 - 6x + m$ равно -8;

2) наибольшее значение функции $y = -x^2 + 4x - m$ равно 12?

974. Постройте график функции:

1) $y = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x}$; 3) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$;

2) $y = \frac{x^3 + 8}{x + 2} - 3$; 4) $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 - 9}$.

975. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a - 2 = 0$ будет принимать наименьшее значение?

976. Решите неравенство:

1) $x^2 - 4x + 3 > 0$; 5) $-3x^2 + 2x + 1 > 0$;

2) $x^2 - 6x - 40 \le 0$; 6) $x - x^2 < 0$;

3) $x^2 + x + 1 \ge 0$; 7) $x^2 + 25x \ge 0$;

4) $x^2 - x + 1 < 0$; 8) $0{,}1x^2 - 2 \le 0$.

977. Найдите целые решения неравенства:

1) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$;

2) $-4x^2 + 3x + 1 \ge 0$.

978. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > -1{,}2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -\frac{1}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x \geq 6; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x \geq 6; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$

979. Решите неравенство:

1) $\frac{x^2 - 16}{|x+1|} \leq 0$; 2) $\frac{x^2 - 5x - 14}{|x-8|} \geq 0$.

980. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 3x - 10}} + \frac{1}{3x - 9}$;

2) $y = \frac{6}{\sqrt{12 + x - x^2}} - \frac{2}{x^2 - 4}$;

3) $y = \sqrt{49 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$.

981. При каких значениях a имеет два различных корня уравнение:
1) $2x^2 + ax + a - 2 = 0$;
2) $(2a - 1)x^2 + (a - 3)x + 1 = 0$;
3) $ax^2 - (3a + 1)x + a = 0$?

982. При каких значениях a множеством решений неравенства является множество действительных чисел:
1) $5x^2 - x + a > 0$; 3) $ax^2 - 2(a - 1)x + 4a \leq 0$;
2) $ax^2 - 10x - 5 < 0$; 4) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$?

983. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = -x^2 + 4x - 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 5. \end{cases}$

984. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - 4y = -6, \\ x^2 + 4y^2 = 8; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = -3; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = -2, \\ 3x^2 - 2xy = 28; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5}, \\ y - x = 4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 13, \\ xy = 15; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} (x - 1)(y - 1) = -2, \\ x + y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 2y = 18, \\ xy = -12; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} (x - 2)(y + 1) = 1, \\ x - y = 3; \end{cases}$

985. Найдите решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ x^2 - 3xy = 4; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12}, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ xy(x + y) = 30; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 14, \\ xy = -6; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 5, \\ y^2 - 4xy = -4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{10}, \\ xy = 50; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{16}{15}, \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases}$

986. Найдите координаты точек пересечения:

1) прямой $3x - y - 5 = 0$ и параболы $y = \dfrac{2}{3}x^2 - 2x + 4$;

2) прямой $2x - 3y - 3 = 0$ и гиперболы $xy = 3$;

3) окружности $x^2 + y^2 = 13$ и гиперболы $xy = 6$.

987. При каком значении a система уравнений имеет единственное решение:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ x + y = a? \end{cases}$

988. Диагональ прямоугольника равна 17 см, а его площадь — 120 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

989. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 41 см, а его площадь – 180 см^2. Найдите катеты треугольника.

990. Из двух городов, расстояние между которыми равно 240 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Через 2 ч после начала движения расстояние между автомобилями составляло 40 км, причём встреча автомобилей уже произошла. Найдите скорость каждого автомобиля, если весь путь между городами один из них проехал на час быстрее, чем другой.

991. Из двух сёл, расстояние между которыми равно 20 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода, которые встретились через 2 ч. Найдите скорость, с которой шёл каждый из них, если один пешеход преодолевает расстояние между сёлами на 1 ч 40 мин быстрее другого.

992. Двое рабочих могут выполнить некоторое задание за 9 ч. Если бы первый проработал 1 ч 12 мин, а потом второй – 2 ч, то было бы выполнено 20 % задания. За какое время может выполнить самостоятельно это задание каждый рабочий?

993. Лодка проходит 15 км по течению реки за то же время, что и 12 км против течения. Чему равна скорость течения, если 1 км по течению и 1 км против течения лодка проходит за 27 мин?

994. Велосипедист проехал от села до железнодорожной станции по шоссейной дороге длиной 10 км, а вернулся по грунтовой дороге длиной 5 км, потратив на весь путь 1 ч 5 мин. Найдите скорость движения велосипедиста по шоссейной дороге, если на обратный путь он потратил на 15 мин меньше, чем на дорогу до станции.

995. Из городов A и B, расстояние между которыми равно 180 км, выехали одновременно навстречу друг другу автобус и грузовик. После их встречи автобус, выехавший из города A, прибыл в город B через 1 ч, а грузовик прибыл в город A через 2 ч 15 мин. Найдите скорость каждого из них.

996. Количество ив составляет 20 % от количества каштанов, растущих в парке. Сколько процентов составляет количество каштанов от количества ив?

997. На сколько процентов увеличится число при увеличении его в 3,2 раза?

998. На сколько процентов уменьшится число при уменьшении его в 4 раза?

999. Одна книга на 50 % дороже другой. На сколько процентов вторая книга дешевле первой?

1000. Мебельная мастерская изготавливает стулья и столы. Стулья сначала составляли 80 % объёма продукции, а сейчас – 90 %. На сколько процентов при этом уменьшилось производство столов?

1001. Вкладчик положил в банк 25 000 р. под 8 % годовых. Какая сумма будет у него на счёте через три года?

1002. Какую сумму денег надо положить в банк под 10 % годовых, чтобы через два года на счёте стало 7260 р.?

1003. После двух последовательных снижений цены на одно и то же количество процентов цена кастрюли снизилась с 300 р. до 192 р. На сколько процентов снижали каждый раз цену?

1004. В результате обработки 120 т риса получили 96 т крупы. Найдите процент выхода крупы при обработке риса.

1005. Сплав содержит 550 г алюминия и 450 г олова. На сколько процентное содержание олова меньше, чем процентное содержание алюминия?

1006. В каком отношении надо смешать 30-процентный и 10-процентный растворы соляной кислоты, чтобы получить 15-процентный раствор?

1007. К сплаву магния и алюминия, содержавшему 15 кг алюминия, добавили 4 кг магния, после чего процентное содержание магния в сплаве повысилось на 12,5 %. Какой была первоначальная масса этого сплава?

1008. Смешав 40-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 8 кг воды, получили 20-процентный раствор. Если бы вместо воды добавили 5 кг 70-процентного раствора, то получили бы раствор, концентрация которого составила бы 61 %. Сколько взяли 40-процентного раствора?

1009. В коробке лежат 16 зелёных шаров и 24 синих шара. Какова вероятность того, что выбранный наугад шар окажется:

1) зелёным;
2) синим;
3) красным;
4) зелёным или синим?

1010. В лотерее разыгрывалось 12 телевизоров, 28 мобильных телефонов, 20 туристических палаток. Всего было выпущено 2400 лотерейных билетов. Какова вероятность:

1) выиграть телевизор;
2) выиграть мобильный телефон или палатку;
3) выиграть какой-нибудь приз;
4) не выиграть никакого приза?

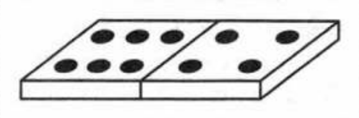
1011. На 20 карточках записаны натуральные числа от 1 до 20. Какова вероятность того, что число, записанное на выбранной наугад карточке, делится нацело на 3 и не делится нацело на 2?

1012. Номер квартиры является двузначным числом. Какова вероятность того, что номер наугад выбранной квартиры:

1) 72; 2) чётное число?

1013. Из 28 костяшек домино наугад выбирают одну и вычисляют сумму очков на ней (на рисунке 108 изображена костяшка, сумма очков которой равна 10). Какова вероятность выбрать костяшку, сумма очков которой равна:

Рис. 108



1) 5; 2) 6; 3) 8; 4) 12; 5) 14?

1014. Бросают одновременно два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут:

1) числа, сумма которых равна 9;

2) числа, сумма которых меньше 7?

1015. В течение первых десяти дней мая температура воздуха в 6 ч утра была такой: 16 °C; 14 °C; 12 °C; 16 °C; 15 °C; 15 °C; 13 °C; 15 °C; 17 °C; 14 °C. Найдите меры центральной тенденции полученной совокупности данных. Заполните частотную таблицу.

Температура воздуха	
Частота	
Относительная частота, %	

1016. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах выборки:

1) 4, 6, 12, 15, 15, 18, 18, 20, 27, 30, 36, 39;

2) 3,2; 3,2; 3,4; 4,2; 4,2; 4,6; 4,6; 4,6; 5,8.

1017. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = n^2 - 4n + 4$. Найдите шесть первых членов этой последовательности. Является ли членом этой последовательности число: 1) 256; 2) 361; 3) 1000; 4) 10 000? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

1018. Найдите количество членов конечной арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 4$, разность прогрессии $d = -5$, а последний член прогрессии равен -36.

1019. Последний член арифметической прогрессии, содержащей семь членов, равен $3\frac{1}{6}$. Найдите первый член этой прогрессии, если её разность равна $\frac{3}{8}$.

1020. Какой номер имеет первый отрицательный член арифметической прогрессии 2; 1,9; 1,8; 1,7; ... ?

1021. Какие номера имеют члены арифметической прогрессии 8, 11, 14, ..., большие 100, но меньшие 200?

1022. Сумма скольких первых членов арифметической прогрессии 105, 98, 91, ... равна нулю?

1023. Найдите величины углов выпуклого четырёхугольника, если они образуют арифметическую прогрессию с разностью 54°.

1024. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите катеты треугольника, если его гипотенуза равна 4 см.

1025. Известно, что бесконечная последовательность a_1, a_2, a_3, ... является арифметической прогрессией с разностью $d \neq 0$. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

1) $-a_2, -a_4, -a_6, -a_8, \ldots$;

2) $a_1 + 5, a_2 + 5, a_3 + 5, \ldots$;

3) $1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3, \ldots$;

4) $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$;

5) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \ldots$;

6) $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, \ldots$?

В случае утвердительного ответа укажите, чему равна разность прогрессии.

1026. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 12, а сумма их квадратов равна 80. Найдите эти числа.

1027. Докажите, что если числа a, b и c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то значения выражений $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ также являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

1028. Докажите, что если:

1) длины сторон a, b и c треугольника образуют арифметическую прогрессию, то $ac = 6Rr$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника;

2) длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию, то её разность равна радиусу вписанной окружности этого треугольника;

3) длины сторон треугольника с углом 120° образуют арифметическую прогрессию, то они относятся как 3 : 5 : 7.

1029. Найдите сумму n первых членов последовательности:

1) $\frac{a-1}{a}, \frac{a-3}{a}, \frac{a-5}{a}, \ldots$;

2) $\frac{a-b}{a+b}, \frac{3a-b}{a+b}, \frac{5a-b}{a+b}, \ldots$.

1030. Третий член арифметической прогрессии равен 11, а седьмой равен 27. Сколько надо взять членов этой прогрессии, чтобы их сумма была равной 253?

1031. Пусть S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии (a_n). Найдите первый член и разность прогрессии, если:

1) $a_3 + a_5 + a_8 = 18$ и $a_2 + a_4 = -2$;
2) $a_5 - a_3 = -4$ и $a_2 a_4 = -3$;
3) $a_2 + a_4 + a_6 = 36$ и $a_2 a_3 = 54$;
4) $S_5 - S_2 - a_5 = 0{,}1$ и $a_7 + S_4 = 0{,}1$;
5) $S_4 = 9$ и $S_6 = 22{,}5$.

1032. Сумма трёх первых членов арифметической прогрессии равна 3, сумма четырёх первых членов равна 16, а сумма всех членов равна 220. Найдите количество членов этой прогрессии.

1033. Чему равна сумма семнадцати первых членов арифметической прогрессии, если её девятый член равен 15?

1034. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию, а его меньший катет равен a. Найдите площадь треугольника.

1035. Найдите сумму двадцати первых нечётных чисел, при делении которых на 3 остаток равен 1.

1036. Чему равна сумма всех двузначных чисел, которые не делятся нацело ни на 3, ни на 5?

1037. Дана геометрическая прогрессия (b_n) со знаменателем q. Найдите:

1) b_1, если $b_5 = -\frac{16}{27}$, $q = -\frac{2}{3}$;
2) q, если $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_4 = \frac{9}{32}$;
3) сумму семи первых членов прогрессии, если $b_7 = 192$, $q = 2$;
4) сумму пяти первых членов прогрессии, если $b_5 = 9\sqrt{6}$, $q = \sqrt{3}$.

1038. Сумма трёх первых членов геометрической прогрессии, содержащей шесть членов, в 8 раз меньше суммы трёх последних. Чему равен знаменатель прогрессии?

1039. Найдите четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, если сумма её крайних членов равна $\frac{35}{3}$, а сумма средних равна 10.

1040. Известно, что бесконечная последовательность b_1, b_2, b_3, ... является геометрической прогрессией со знаменателем $q \neq 1$. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) b_2, b_4, b_6, ...;
2) $b_1 + 1$, $b_2 + 1$, $b_3 + 1$, ...;
3) b_1^2, b_2^2, b_3^2, ...;
4) $-b_1$, $-b_3$, $-b_5$, ...;
5) $b_1 + b_2$, $b_2 + b_3$, $b_3 + b_4$, ...;
6) $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{b_2}$, $\frac{1}{b_3}$, ... ?

В случае утвердительного ответа укажите, чему равен знаменатель этой прогрессии.

1041. Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, если:

1) сумма прогрессии равна 4, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$;

2) сумма прогрессии равна $\sqrt{2}+1$, а знаменатель равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) сумма прогрессии равна $\frac{16}{3}$, а сумма пяти первых членов равна 5,5.

1042. Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(21); 3) 2,(7); 5) 0,(901);
2) 0,2(3); 4) 0,(19); 6) 1,0(7).

1043. Первый член бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q таким, что $|q| < 1$, равен $6\sqrt{3}$, а её сумма равна $9(\sqrt{3}+1)$. Найдите знаменатель прогрессии.

Сведения из курса алгебры 7–8 классов

Выражения и их преобразования

1. Степень с натуральным показателем

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ множителей}}, \text{ где } n > 1,\ n \in N;$$

$$a^1 = a.$$

2. Степень с целым отрицательным показателем

✔ Для любого числа a, не равного нулю, и натурального числа n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

✔ Для любого числа a, не равного нулю, $a^0 = 1$.

✔ Выражение 0^n при целых n, меньших или равных нулю, не имеет смысла.

3. Свойства степени с целым показателем

✔ Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$
$$a^m : a^n = a^{m-n};$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

✔ Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняются равенства:

$$(ab)^n = a^n b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

4. Стандартный вид числа

✔ Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n – целое число. Число n называют порядком числа, записанного в стандартном виде.

5. Одночлены

✔ Выражения, являющиеся произведениями чисел, переменных и их степеней, называют одночленами.

- ✔ Одночлен, содержащий только один отличный от нуля числовой множитель, стоящий на первом месте, а все остальные множители которого — степени с разными основаниями, называют одночленом стандартного вида. К одночленам стандартного вида также относят числа, отличные от нуля, переменные и их степени.
- ✔ Число 0, а также одночлены, тождественно равные нулю, называют нуль-одночленами. Их не относят к одночленам стандартного вида.
- ✔ Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют коэффициентом одночлена.
- ✔ Одночлены, имеющие одинаковые буквенные части, называют подобными.
- ✔ Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех переменных, входящих в него. Степень одночлена, являющегося числом, отличным от нуля, считают равной нулю.
- ✔ Считают, что нуль-одночлен степени не имеет.

6. Многочлены

- ✔ Выражение, являющееся суммой нескольких одночленов, называют многочленом.
- ✔ Одночлены, из которых состоит многочлен, называют членами многочлена.
- ✔ Одночлен является частным случаем многочлена. Считают, что такой многочлен состоит из одного члена.

7. Умножение одночлена на многочлен

- ✔ Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

8. Умножение многочлена на многочлен

- ✔ Чтобы умножить многочлен на многочлен, можно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

9. Произведение разности и суммы двух выражений

✔ Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

10. Разность квадратов двух выражений

✔ Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

11. Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

✔ Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений, плюс квадрат второго выражения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

✔ Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений, плюс квадрат второго выражения:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

12. Преобразование многочлена в квадрат суммы или разности двух выражений

✔ Формулы

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

позволяют «свернуть» трёхчлен в квадрат двучлена.

✔ Трёхчлен, который можно представить в виде квадрата двучлена, называют полным квадратом.

13. Сумма и разность кубов двух выражений

✔ Многочлен a^2-ab+b^2 называют неполным квадратом разности.

✔ Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

✔ Многочлен a^2+ab+b^2 называют неполным квадратом суммы.

- Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

14. Рациональные выражения

- Целые и дробные выражения вместе образуют рациональные выражения.

- Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональное выражение, называют все значения переменных, при которых это выражение имеет смысл.

15. Тождественно равные выражения. Тождества

- Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

- Равенство, верное при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

16. Основное свойство рациональной дроби

- Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же многочлен, тождественно не равный нулю, то получим дробь, тождественно равную данной.

Квадратные корни

17. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

- Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

- Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a.

  Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$.

  Знак «$\sqrt{\ }$» называют знаком квадратного корня или радикалом.

- Выражение, стоящее под знаком радикала, называют подкоренным выражением. Из определения арифметического квадратного корня следует, что подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения.

- ✔ Если $\sqrt{a} = b$, то $b \geq 0$ и $b^2 = a$.
- ✔ Для любого неотрицательного числа a справедливо, что $\sqrt{a} \geq 0$ и $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

18. Свойства арифметического квадратного корня

- ✔ Для любого действительного числа a выполняется равенство
$$\sqrt{a^2} = |a|.$$
- ✔ Для любого действительного числа a и натурального числа n выполняется равенство
$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$
- ✔ Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geq 0$ и $b \geq 0$, выполняется равенство
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$
- ✔ Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geq 0$ и $b > 0$, выполняется равенство
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$
- ✔ Для любых неотрицательных чисел a_1 и a_2 таких, что $a_1 > a_2$, выполняется неравенство
$$\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}.$$

Уравнения

19. Корень уравнения

- ✔ Корнем уравнения называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.
- ✔ Решить уравнение означает найти все его корни или убедиться, что их вообще нет. Также можно сказать, что решить уравнение – это значит найти множество его корней.

20. Равносильные уравнения

- ✔ Два уравнения называют равносильными, если они имеют одно и то же множество корней.

21. Свойства уравнений

- Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.
- Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.
- Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

22. Линейное уравнение с одной переменной

- Уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, a и b – некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной.

Уравнение $ax = b$	$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
	$x = \dfrac{b}{a}$	x — любое число	нет корней

23. Квадратные уравнения

- Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b, c – некоторые числа, причём $a \neq 0$.
- Выражение $b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и обозначают буквой D, т. е. $D = b^2 - 4ac$.

  Если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.

  Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень $x = -\dfrac{b}{2a}$.

  Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня x_1 и x_2:

  $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

  Применяют короткую форму записи:

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

24. Теорема Виета

✔ Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

✔ Если x_1 и x_2 – корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 x_2 = c.$$

25. Теорема, обратная теореме Виета

✔ Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -b$ и $\alpha\beta = c$, то эти числа являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

26. Квадратный трёхчлен

✔ Квадратным трёхчленом называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причём $a \neq 0$.

✔ Число $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

✔ Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положительный, то данный трёхчлен можно разложить на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

✔ Если дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю, то считают, что квадратный трёхчлен имеет два равных корня, т. е. $x_1 = x_2$. В этом случае разложение квадратного трёхчлена на множители имеет такой вид:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

✔ Если дискриминант квадратного трёхчлена отрицательный, то данный трёхчлен нельзя разложить на линейные множители.

27. Рациональные уравнения

✔ Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют рациональным.

✔ Чтобы решить уравнение вида $\frac{A}{B} = 0$, где A и B – многочлены, следует руководствоваться таким алгоритмом:

- решить уравнение $A = 0$;
- проверить, какие из найденных корней удовлетворяют условию $B \neq 0$;
- корни, удовлетворяющие условию $B \neq 0$, включить в ответ.

Функции

28. Функция. Область определения и область значений функции

✔ Правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной, называют функцией, а соответствующую зависимость одной переменной от другой – функциональной.

✔ Независимую переменную называют аргументом функции.

✔ Для функции f каждому значению аргумента x соответствует некоторое значение зависимой переменной y. Значение зависимой переменной называют значением функции и обозначают $f(x)$.

✔ Все значения, которые принимает аргумент, образуют область определения функции. Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют область значений функции.

29. Способы задания функции

Описательный, табличный, с помощью формулы, графический.

30. График функции

✔ Графиком функции f называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции f.

✔ Если какая-то фигура является графиком функции f, то выполняются два условия:
1) если x_0 – некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ – соответствующее значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ обязательно принадлежит графику;

2) если $(x_0; y_0)$ – координаты произвольной точки графика, то x_0 и y_0 – соответствующие значения независимой и зависимой переменных функции f, т. е. $y_0 = f(x_0)$.

31. Линейная функция, её график и свойства

✔ Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b – некоторые числа, x – независимая переменная, называют линейной.

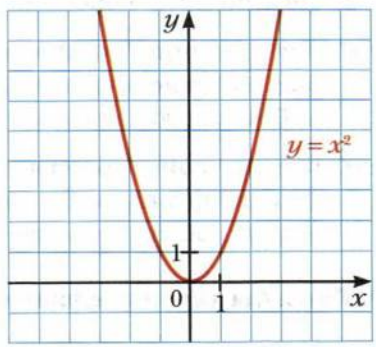
Графиком линейной функции является прямая.

✔ Линейную функцию, заданную формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.

32. Функция $y = x^2$ и её график

Область определения	Множество действительных чисел
Область значений	Множество неотрицательных чисел
График	Парабола

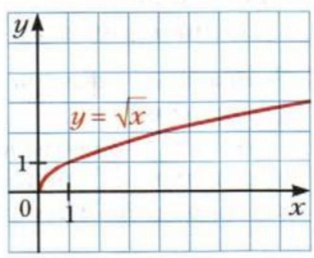
Рис. 109



33. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

Область определения	Множество неотрицательных чисел
Область значений	Множество неотрицательных чисел
График	Ветвь параболы

Рис. 110



34. Функция $y = \dfrac{k}{x}$ и её график

Область определения	Множество действительных чисел, кроме 0
Область значений	Множество действительных чисел, кроме 0
График	Гипербола

Рис. 111

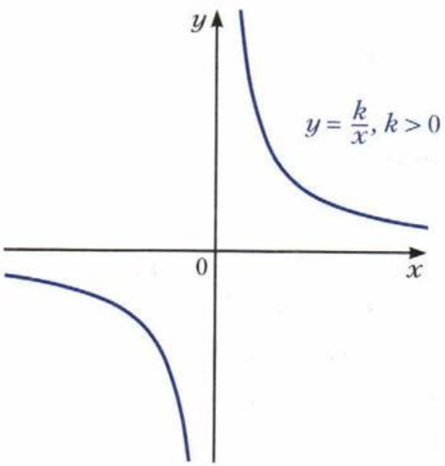
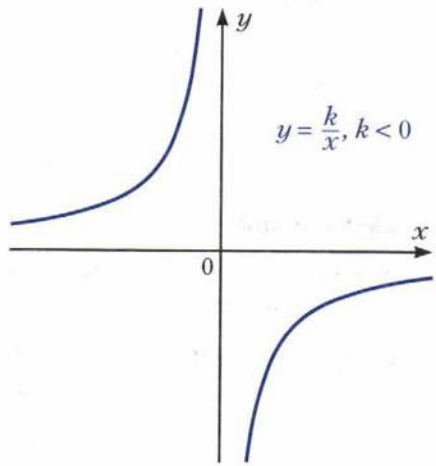


Рис. 112



Системы линейных уравнений с двумя переменными

35. Уравнение с двумя переменными

- ✔ Пару значений переменных, обращающую уравнение с двумя переменными в верное равенство, называют решением уравнения с двумя переменными.
- ✔ Решить уравнение с двумя переменными – значит найти все его решения или показать, что оно не имеет решений.
- ✔ Графиком уравнения с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых (пары чисел) являются решениями данного уравнения.

- ✔ Если некоторая фигура является графиком уравнения, то выполняются два условия:
  1) все решения уравнения являются координатами точек, принадлежащих графику;
  2) координаты любой точки, принадлежащей графику, – это пара чисел, являющаяся решением данного уравнения.

36. Системы уравнений с двумя переменными

- ✔ Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающих каждое уравнение в правильное равенство.
- ✔ Решить систему уравнений – значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Модуль числа

37. Модуль числа

- ✔ Модулем числа a называют расстояние от начала отсчёта до точки, изображающей это число на координатной прямой.
- ✔ Модуль числа a обозначают так: $|a|$ (читают «модуль a»).

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

- ✔ Модуль числа принимает только неотрицательные значения.
- ✔ Модули противоположных чисел равны: $|a| = |-a|$.

Проценты

38. Нахождение процентов от числа

- ✔ Чтобы найти проценты от числа, можно представить проценты в виде дроби и умножить число на эту дробь.

39. Нахождение числа по его процентам

- ✔ Чтобы найти число по его процентам, можно представить проценты в виде дроби и разделить значение процентов на эту дробь.

40. Процентное отношение двух чисел

✔ Процентное отношение двух чисел – это их отношение, выраженное в процентах. Оно показывает, сколько процентов одно число составляет от другого.

✔ Чтобы найти процентное отношение двух чисел, надо их отношение умножить на 100 и к результату дописать знак процента.

41. Множество. Операции над множествами

✔ Объекты, составляющие данное множество, называют элементами этого множества.

✔ Множество можно задать:

- перечислением, записав его элементы в фигурных скобках через запятую;
- указанием характеристического свойства элементов множества, т. е. свойства, которым обладают все элементы данного множества и только они.

✔ Если a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$. Если b не принадлежит множеству A, то пишут $b \notin A$.

✔ Два множества A и B называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. каждый элемент множества A принадлежит множеству B и наоборот, каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

✔ Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством и обозначают символом $\varnothing$.

✔ Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

✔ Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B.

✔ Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B.

42. Числовые множества

$\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел;
$\boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел;
$\boldsymbol{Q}$ – множество рациональных чисел;
$\boldsymbol{R}$ – множество действительных чисел.
$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект – это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсах. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражается замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками и рекомендованной литературой с помощью руководителя проекта составляется окончательный план.

3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.

4. Работа завершается подведением итогов исследования: делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.

5. Примерный объём работы – 10–15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.

6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Выдающиеся российские математики

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

http://www.mi.ras.ru/ Математический институт им. В.А. Стеклова РАН.

http://ru.wikipedia.org/wiki/ Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, знаменитые сотрудники.

http://www.kolmogorov.info/ Колмогоров Андрей Николаевич.

http://slovari.yandex.ru/dict/bse/article/00088/94600.htm Чебышёв Пафнутий Львович.

http://slovari.yandex.ru/dict/bse/article/00043/39500.htm Ломоносов Михаил Васильевич.

http://ru.wikipedia.org/wiki/ Математики России.

2. Симметрия в алгебре

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. – М. : МЦНМО, 2002.

Курляндчик Л.Д., Фомин Д. Теорема Виета и вспомогательный многочлен // Квант. – 1984. – № 12.

Парамонова И.М. Симметрия в математике. – М. : МЦНМО, 2002.

http://mmmf.msu.ru/ Малый мехмат МГУ.

http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.

3. Системы линейных неравенств и решение экономических задач

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Олейников Б., Бузницкий П., Дубсон М. Симплекс метод // Квант. – 1976. – № 7.

Рейтман М.И. Транспортная задача // Квант. – 1974. – № 6.

Солодовников А.С. Системы линейных неравенств. – М. : Наука, 1977.

http://ilib.mccme.ru/plm/ Барсов А.С. Что такое линейное программирование. Популярные лекции по математике. Вып. 33.

http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

4. От тайнописи к криптографии

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Василего И.П. Теория чисел в криптографии (для школьников) : методические указания. – Оренбург : ГОУ ОГУ, 2004.

Жельников В. Криптография от папируса до компьютера. – М. : ABF, 1996.

Игнатьев Е. О шифрах // Квант. – 1991. – № 4.

Перельман Я.И. Живая математика. – М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1967.

Ященко В.В., Введение в криптографию. – М. : МЦНМО, 1999.

http://nature.web.ru/db/msg.html?mid=1157083&uri=node71.html Олимпиады по криптографии для школьников.

http://ru.wikipedia.org/wiki/ История криптографии.

5. Эффективные методы доказательства неравенств

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Алексеев Р.Б., Курляндчик Л.Д. Нетрадиционные способы доказательства традиционных неравенств // Математика в школе. – 1991. – № 4.

Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М. : Мир, 1965.

Дворянинов С.В., Ясиновый Э.А. Как получаются симметрические неравенства // Квант. – 1985. – № 5.

Ижболдин И., Курляндчик Л. Неравенство Иенсена // Квант. – 2000. – № 4.

Курляндчик Л., Файбусович А. История одного неравенства // Квант. – 1991. – № 4.

Пинтер Л., Хегедыш Й. Упорядоченные наборы чисел и неравенства // Квант. – 1985. – № 12.

Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства. – М. : Физматлит, 2002.

Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. – М. : Наука, 1967.

http://www.bymath.net/studyguide/alg/sec/alg28.html Доказательство неравенств.

6. Цепные дроби

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Арнольд В.И. Цепные дроби. – М. : МЦНМО, 2000.

Бескин Н.М. Бесконечные цепные дроби // Квант. – 1970. – № 8.

Бескин Н.М. Цепные дроби // Квант. – 1970. – № 1.

Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М. ; Л. : Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1952.

Устинов А. Цепные дроби вокруг нас // Квант. – 2010. – № 2.

Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М. : ГИФМЛ, 1960.

http://ru.wikipedia.org/wiki/ Непрерывная дробь.

7. Геометрическая вероятность

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Васильев Н. Геометрические вероятности // Квант. – 1991. – № 1.

Васильев Н., Спивак А. Посчитаем вероятности // Квант. – 1997. – № 4.

Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – М. : ФИМА, МЦНМО, 2006.

Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М. : МЦНМО, 2004.

Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач. — М. : Наука, 1971.

Шень А. Вероятность: примеры и задачи. — М. : МЦНМО, 2007.

http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

8. Формула включений и исключений

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. — М. : ФИМА, МЦНМО, 2006.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. — Киров : АСА, 1984.

Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М. : МЦНМО, 2004.

Яглом И. Заплаты на кафтане // Квант. — 1974. — № 2.

http://ru.wikipedia.org/wiki/ Формула включений и исключений.

http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.

9. Алгебраические уравнения высших степеней

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Еремин М.А. Уравнения высших степеней. — Арзамас, 2003.

Курош А.Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней. — М. : Наука, 1975.

Лоповок Л.М. 1000 проблемных задач по математике. — М. : Просвещение, 1995.

Шафаревич И.Р. Популярные лекции по математике. О решении уравнений высших степеней. Вып. 15. — М. : Наука, 1954.

http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.

http://yrokityt.at.ua/publ/2-1-0-30 Уравнения высших степеней (каталог статей).

http://www.pm298.ru/mnog3.php Схема Горнера.

10. Алгебра высказываний

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. – 3-е изд. – М. : МЦНМО, 2005.

Гжегорчик А. Популярная логика. – М. : Наука, 1979.

Градштейн И. Прямая и обратная теоремы. – М. : Наука, 1972.

Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М. : Мир, 1998.

Мадер В. Школьнику об алгебре логики. – М. : Просвещение, 1993.

http://digital.sibsutis.ru/digital/AlgLog.htm Законы алгебры логики.

http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/ALGEBRA_VISKAZIVANI.html Алгебра высказываний.

Дружим с компьютером

В предыдущих классах вы уже использовали компьютер при изучении алгебры. Вы научились:

- пользоваться **калькулятором** для вычислений;
- набирать и оформлять несложные тексты в **текстовом редакторе** (например, *Microsoft Word*);
- составлять таблицы с помощью **редактора таблиц** (например, *Microsoft Excel*);
- рисовать с помощью **графического редактора** (например, *Paint*);
- пользоваться глобальной сетью **Интернет** и искать в ней информацию.

Все эти умения вы будете совершенствовать и далее.

Если вы хотите в будущем стать математиком, программистом, инженером, т. е. широко использовать математику в своей работе, то советуем вам осваивать специализированные математические пакеты, которые помогают школьникам и студентам выполнять техническую работу при решении задач. Это, например, *MathLAB*, *MathCAD*. Также полезно научиться пользоваться графическим редактором, с помощью которого можно работать с геометрическими фигурами и строить чертежи. Примерами таких редакторов могут быть *CorelDraw*, *Visio* и т. п. Если вы собираетесь выступить с докладом или интересным сообщением, то сделать его более наглядным помогут программы для построения презентаций (например, *PowerPoint*).

Кроме этого, существует много других программ, созданных специально для школьников и предназначенных для помощи в изучении математики. Вот ссылки на некоторые из таких программ:

http://www.pcmath.ru/ Компьютерные программы по математике.

http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

Конечно же это далеко не всё, что есть на просторах Интернета. Вы можете самостоятельно с помощью поисковых систем найти нужные сайты и пользоваться ими.

Ищите, интересуйтесь, общайтесь со своими сверстниками, и вы найдёте много интересного. А может, став постарше, вы и сами разработаете полезные программы для изучения математики.

Задания для выполнения с помощью компьютера

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Большинство этих заданий — продолжение и развитие упражнений этого учебника, которые вы будете решать на уроках и дома (такие упражнения в тексте учебника помечены значком); в этом разделе указан номер соответствующего задания.

Задания, требующие использования калькулятора, выполняйте с помощью стандартной программы «Калькулятор», которая есть на вашем компьютере.

На уроках информатики вы будете изучать элементы программирования, создавать алгоритмы и программы, в которых будут использоваться полученные математические знания. Такие задания, содержащие элементы программирования, являются необязательными. Они отмечены звёздочкой. Пока вы не изучили на нужном уровне какой-либо язык программирования, достаточно придумать алгоритм и записать его словами либо в виде блок-схемы. Заметим, что умение составлять алгоритмы (последовательности действий) пригодится вам не только в программировании, но и в других областях деятельности.

К § 1 «Числовые неравенства»

Найдите в сети Интернет правила дорожного движения. Выберите из дорожных знаков те, которые задают предельно допустимые значения каких-либо числовых величин. Запишите соответствующие неравенства.

К § 2 «Основные свойства числовых неравенств»

Каким образом с помощью графического редактора продемонстрировать свойства числовых неравенств? Какие инструменты редактора можно при этом использовать?

К § 4 «Неравенства с одной переменной»

Нарисуйте с помощью графического редактора координатную прямую. Проиллюстрируйте решение примеров **98**, **99**, **106**. Какие инструменты графического редактора помогли наглядно продемонстрировать ход решения?

К § 5 «Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки»

Выполните задания **110**, **111**, **112** с помощью графического редактора.

К § 6 «Системы линейных неравенств с одной переменной»

Выполните задания **172**, **173** с помощью графического редактора.

202. Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

223, 224, 225. Эти три задачи представляют собой три типовых примера задач на проценты. Опишите каждую из них в общем случае, создайте математическую модель, опишите входные и выходные данные задачи и запишите алгоритм решения.

К § 7 «Повторение и расширение сведений о функции»

Какие способы задания функции удобны для того, чтобы представить эту функцию с помощью компьютера? Какие инструменты для этого используются?

К § 8 «Свойства функции»

Функция задана таблично. Запишите алгоритм для поиска промежутков знакопостоянства и алгоритм для поиска промежутков возрастания и убывания функции. Какому условию должно удовлетворять расположение столбцов в этой таблице? Можно ли составить такой алгоритм для других способов задания функции?

284. Составьте математическую модель этой задачи в общем виде. Запишите алгоритм решения этой задачи в общем виде.

К § 9 «Построение графика функции $y = kf(x)$»

С помощью табличного редактора задайте какую-либо функцию $y = f(x)$ таблично и постройте её график. Какие изменения надо внести в таблицу, чтобы получить график функции $y = kf(x)$? Как сделать это автоматически? Постройте таким образом несколько графиков функции $y = kf(x)$ для различных значений k.

Постройте график какой-либо функции $y = f(x)$ с помощью графического редактора. Какие инструменты графического редактора надо использовать, чтобы получить из этого графика график функции $y = kf(x)$ при $k > 1$; при $0 < k < 1$; при $k = -1$? Как можно использовать полученные результаты, чтобы получить график функции $y = kf(x)$ при $k < 0$ и $k \neq -1$?

К § 10 «Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$»

С помощью табличного редактора задайте какую-либо функцию $y = f(x)$ таблично и постройте её график. Какие изменения надо внести в таблицу, чтобы получить график функции $y = f(x) + b$? $y = f(x + a)$?

$y = f(x + a) + b$? Как сделать это автоматически? Постройте таким образом несколько графиков функции $y = f(x + a) + b$ для различных значений a и b.

Постройте график какой-либо функции $y = f(x)$ с помощью графического редактора. Какие инструменты графического редактора надо использовать, чтобы получить из этого графика график функции $y = f(x) + b$? $y = f(x + a)$? Как можно использовать полученные результаты, чтобы получить график функции $y = f(x + a) + b$?

К § 11 «Квадратичная функция, её график и свойства»

Парабола задана уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Запишите алгоритм для определения таких характеристик параболы: направление ветвей, координаты вершины, точки пересечения с осями координат, входными данными для которого являются значения a, b, c.

Пользуясь этим алгоритмом, определите, какой участок параболы целесообразно изобразить на графике. Автоматизируйте процесс составления соответствующей таблицы значений функции и постройте график по полученной таблице. Как вы будете выбирать значения аргумента функции для этой таблицы, чтобы график получился как можно более точным?

К § 12 «Решение квадратных неравенств»

Пользуясь таблицей, приведённой в § 12, запишите алгоритм для решения квадратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0$, входными данными для которого являются значения a, b, c.

Какие входные данные надо добавить к этому алгоритму и как изменить его, чтобы с его помощью решать также неравенства $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$?

К § 13 «Системы уравнений с двумя переменными»

Вася Ошибочкин захотел решить систему уравнений таким образом: для каждого из них построить график уравнения, задав в табличном редакторе таблицу соответствующих значений, а затем найти на экране компьютера точки пересечения этих графиков. В чём состоят недостатки этого плана?

К § 14 «Математическое моделирование»

✲

Проанализируйте задачи этого параграфа. Опишите каждую из них в наиболее общем виде. Найдите те из них, которые имеют одинаковые математические модели. Запишите алгоритм для решения каждой задачи в общем виде, опишите, что является входными и выходными данными для этого алгоритма.

К § 15 «Процентные расчёты»

Как использовать калькулятор для вычислений по формуле сложных процентов? Решите задачи **523**, **524** с помощью калькулятора.

✲

Проанализируйте задачи этого параграфа. Найдите те из них, которые имеют одинаковые математические модели. Создайте список «типовых» задач, связанных с процентными расчётами. Запишите алгоритм для решения каждой задачи в общем виде, опишите, что является входными и выходными данными для этого алгоритма.

К § 16 «Абсолютная и относительная погрешности»

Найдите в Интернете какие-либо интересные статистические данные о нашей стране. Какие из этих данных являются точными, а какие — приближёнными? Можно ли по приведённым данным оценить абсолютную погрешность приближения? Относительную погрешность? Удалось ли вам найти данные, вместе с которыми приведена погрешность?

К § 17 «Основные правила комбинаторики»

Как можно проиллюстрировать с помощью табличного редактора правило суммы? Правило произведения? Выберите задачи из этого параграфа и проиллюстрируйте их.

К § 18 «Частота и вероятность случайного события»

Как можно использовать компьютер в экспериментах по определению статистической вероятности?

Задания этого параграфа наглядно демонстрируют преимущества использования компьютера для статистических вычислений. Более того, современные табличные редакторы могут взять на себя много технической работы по выполнению вычислений. Освойте инструменты табличного редактора, которые позволяют по данным, уже имеющимся в таблице, вычислить новые данные и занести их в таблицу.

611. Выполните задание с помощью табличного редактора. Можете ли вы автоматизировать получение ответов?

617. Перенесите приведённую в задаче таблицу в табличный редактор. Добавьте столбец «Вероятность того, что выбранный наугад предмет окажется предметом, описанным в данной строке». Можете ли вы сделать так, чтобы этот столбец заполнился автоматически?

619. Это задание тоже можно выполнить с помощью табличного редактора.

К § 19 «Классическое определение вероятности»

Табличный редактор поможет вам рассматривать все возможные результаты испытаний и отмечать, какие из них являются благоприятными.

Составьте таблицу, в первой колонке которой записаны все возможные результаты, полученные при одновременном подбрасывании двух монет (рис. 91). Отметьте во второй колонке события, которые являются благоприятными согласно условию задачи. Какие инструменты табличного редактора позволят автоматически подсчитать нужную вероятность?

Решите с помощью этой таблицы задачу **654**.

Решите аналогичным образом задачи **634**, **642**, **643**, **653**, **656**.

Какое условие должно выполняться для всех строк таблицы, чтобы этот способ решения давал правильные результаты?

К § 20 «Начальные сведения о статистике»

Освойте различные способы оформления диаграмм.

Найдите в Интернете интересные данные о городе, области, географическом районе, в котором вы живёте, и оформите их в виде диаграмм.

Научитесь с помощью табличного редактора вычислять меры центральной тенденции выборки. Можете ли вы полностью автоматизировать эту работу с помощью инструментов табличного редактора?

Выполните задания **666**, **667**, **677**, **678**, **681**, **682**, **685** с помощью компьютера.

К § 21 «Числовые последовательности»

В табличном редакторе можно заполнять ячейки таблицы членами последовательности, заданной с помощью формулы n-го члена последовательности и с помощью рекуррентной формулы. Освойте эти способы заполнения таблицы.

Примечание. Очевидно, что таким способом можно сформировать только конечную последовательность.

Используйте эти способы для выполнения некоторых заданий этого параграфа по вашему выбору.

К § 22 «Арифметическая прогрессия»

В табличном редакторе создайте механизм для заполнения ячеек таблицы членами конечной арифметической прогрессии. Как сделать так, чтобы этот механизм можно было использовать для получения арифметической прогрессии с любыми значениями a и d?

К § 23 «Сумма n первых членов арифметической прогрессии»

Создайте в табличном редакторе таблицу, первый столбец которой содержит номер k члена арифметической прогрессии, второй – значение данного члена, третий – сумму k первых членов арифметической прогрессии. Максимальное значение k выберите на своё усмотрение. Можете ли вы полностью автоматизировать построение этой таблицы по данным значениям a_1 и d?

К § 24 «Геометрическая прогрессия»

В табличном редакторе создайте механизм для заполнения ячеек таблицы членами конечной геометрической прогрессии. Как сделать так, чтобы этот механизм можно было использовать для получения арифметической прогрессии с любыми значениями b_1 и q?

К § 25 «Сумма n первых членов геометрической прогрессии»

В § 24 вы создали таблицу, которая строит арифметическую прогрессию с заданными a_1 и d. Дополните эту таблицу четвёртым столбцом, который содержит значение k-го члена геометрической прогрессии, у которой $b_1 = a_1$, $q = d$, и пятым столбцом, который содержит сумму k первых членов этой геометрической прогрессии. Постройте график на основании этой таблицы.

Исследуйте поведение этих арифметической и геометрической прогрессий для различных значений a_1 и d.

К § 26 «Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше 1»

Постройте таблицу, иллюстрирующую вычисление суммы n первых членов бесконечной геометрической прогрессии, у которой $|q| < 1$. Постройте соответствующий график.

Ответы и указания

10. 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет. **18.** Значение дроби увеличится. **19.** Значение дроби уменьшится или не изменится. **22.** 1) Нет; 2) да. **26.** Да. **28.** 1) *Указание.* $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$. **48.** 3) возможны варианты. **54.** 4) Если $c > 0$, то $c^2 > -4c$; если $-4 < c < 0$, то $c^2 < -4c$; если $c = 0$, то верное неравенство получить невозможно. **56.** 1. **57.** 24. **71.** 3) Нет; 4) нет; 5) нет; 6) да; 8) да; 10) да; 11) нет; 12) да; 13) нет; 14) нет. **86.** 1) $\sqrt{10} + \sqrt{6} > \sqrt{11} + \sqrt{5}$; 2) $2 + \sqrt{11} < \sqrt{5} + \sqrt{10}$; 3) $\sqrt{15} - \sqrt{5} > \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{21} + \sqrt{20} > 9$. **87.** 1) $\sqrt{6} + \sqrt{3} > \sqrt{7} + \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26} - \sqrt{2} < \sqrt{14}$. **91.** 400 %. **108.** 4) Корней нет; 5) x — любое число; 6) –6. **109.** 6 км. **134.** 3) $(-\infty; -5]$; 4) $(-\infty; 1)$; 5) $[7; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; \frac{6}{11}\right]$; 7) $(-\infty; 7{,}5]$; 8) $(1; +\infty)$; 9) $(-\infty; +\infty)$; 10) решений нет; 11) $(-\infty; +\infty)$; 12) $(-\infty; 0)$. **135.** 1) $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$; 2) $[-6; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; -6]$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(-3{,}5; +\infty)$. **136.** 1) –8; 2) –1. **137.** 1) –6; 2) –3. **138.** 5 решений. **139.** 8 решений. **142.** 1) $a < -\frac{9}{4}$; 2) $a \le 1{,}6$. **143.** 1) $b < 3$; 2) $b < -\frac{1}{8}$. **144.** 12 км. **145.** Таких чисел не существует. **146.** 18 шаров. **147.** 44 вишни. **148.** 21. **149.** 28, 30, 32. **150.** 25, 30, 35. **151.** 1) При $-4 \le x < 2$ и $x > 2$; 2) при $x < -4$ и $-4 < x \le 3$; 3) при $-3 < x < -2$, $-2 < x < 2$ и $x > 2$; 4) при $-1 < x < 1$ и $x > 1$. **152.** 1) При $x < -3$ и $-3 < x \le 9$; 2) при $7 < x < 8$ и $x > 8$. **153.** 1) 9; 2) –3; 3) 13; 2,2; 4) корней нет. **154.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) –2; 12. **157.** 3) При $a > -1$ и $a \ne 1$. **158.** 2) При $m < 7$ и $m \ne 0$. **159.** 1) При $a > -1$ и $a \ne 0$; 2) при $a < \frac{9}{16}$ и $a \ne -1$; 3) при $a < \frac{19}{5}$ и $a \ne 3$. **160.** При $a < -\frac{1}{12}$. **161.** 1) 3; 2) –1. **162.** 1) –7; 2) –4. **163.** 1) Если $a > 0$, то $x > 0$; если $a < 0$, то $x < 0$; если $a = 0$, то решений нет; 2) если $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$; если $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то x — любое число; 3) если $a > 0$, то $x \ge 1$; если $a < 0$, то $x \le 1$; если $a = 0$, то x — любое число; 4) если $a < 2$, то $x < -2$; если $a > 2$, то $x > -2$; если $a = 2$, то решений нет; 5) если $a > 2$, то $x > a + 2$; если $a < 2$, то $x < a + 2$; если $a = 2$, то решений нет; 6) если $a > -3$, то $x \le a - 3$; если $a < -3$, то $x \ge a - 3$; если $a = -3$, то x — любое число. **164.** 1) Если $a \ne 0$, то $x \le 0$; если $a = 0$, то x — любое число; 2) если $a > -1$, то $x < \frac{2-a}{a+1}$; если $a < -1$, то $x > \frac{2-a}{a+1}$; если $a = -1$, то x — любое число; 3) если $a > -4$, то $x > \frac{1}{a+4}$;

если $a < -4$, то $x < \frac{1}{a+4}$; если $a = -4$, то решений нет. **168.** 15 ч, 10 ч. **192.** 1) $\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty; -4{,}2)$; 3) $[-2; 3]$; 4) $[-0{,}8; +\infty)$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $(-\infty; -4]$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **193.** 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$; 2) $[-10; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **194.** 1) -3; -2; -1; 0; 2) 7; 8; 9; 10; 11. **195.** 1) 4 решения; 2) 6 решений. **196.** 1) $[2{,}5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{5}{3}; 3\right)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; 4)$. **197.** 1) $(0; 8]$; 2) $(5; +\infty)$. **198.** 1) $(-0{,}5; 6{,}5)$; 2) $[14; 17]$. **199.** 1) $[-1{,}5; 2{,}5)$; 2) $\left[0; \frac{1}{3}\right)$. **200.** 2) $(1{,}5; 7)$; 3) $(-\infty; -2)$. **201.** 1) $\varnothing$; 2) $(1; 3)$. **202.** 3 см, 5 см или 4 см, 4 см. **203.** 1) $[-4; 3]$; 2) $(-\infty; -1)$ или $(3{,}5; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1)$ или $(8; +\infty)$; 4) $(-2; 9)$; 5) $(-2; 0{,}5]$; 6) $(-\infty; -0{,}8]$ или $(6; +\infty)$. **204.** 1) $(-3; 2)$; 2) $(-\infty; 4)$ или $(8; +\infty)$; 3) $(-\infty; -9)$ или $[1{,}2; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{1}{4}; 10\right)$. **205.** 1) $[-1{,}6; 5{,}6]$; 2) $(-4; 1)$; 3) $(-\infty; -12)$ или $(6; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2]$ или $\left[\frac{8}{3}; +\infty\right)$; 5) $[1; +\infty)$; 6) $\left(-\frac{11}{7}; +\infty\right)$. **206.** 1) $(-\infty; 3{,}6]$ или $[8{,}4; +\infty)$; 2) $[-2; -1{,}2]$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty; 2]$. **207.** 1) При $a > 3$; 2) при $a \le 3$. **208.** 1) При $a \le 4$; 2) при $a > 1$. **209.** 1) При $a \le -1$; 2) при $a = 1$. **210.** Если $a < 2$, то $x \le a$; если $a \ge 2$, то $x < 2$. **211.** Если $a < -3$, то $a < x < -3$; если $a \ge -3$, то решений нет. **212.** При $10 < a \le 11$. **213.** При $1 < b \le 2$. **214.** При $8 \le a < 9$. **215.** При $-6 \le b < -5$. **216.** При $a < 3$. **217.** При $-\frac{1}{3} \le a \le 3$. **218.** При $a < -7$ или $a > 8$. **219.** 1) -1; 2) -2; 4. **220.** 1) $2\sqrt{10} - \sqrt{6}$; 2) $0{,}5\sqrt{2b}$; 3) $-4\sqrt{6}$. **242.** 2) Все числа, кроме 7 и -7; 4) все числа, не меньшие 4, кроме числа 6. **252.** 60 км/ч. **270.** $a < \frac{1}{8}$. **271.** $a > 9$. **272.** 2. **273.** $m < -2$. **279.** $a = 1$, $a = 2$ и $a = 1{,}5$. **280.** Если $a < -2$, то наибольшее значение $f_{наиб} = f(a) = a^2$, наименьшее значение $f_{наим} = f(0) = 0$; если $a = -2$, то $f_{наиб} = f(-2) = f(2) = 4$, $f_{наим} = f(0) = 0$; если $-2 < a \le 0$, то $f_{наиб} = f(2) = 4$, $f_{наим} = f(0) = 0$; если $0 < a < 2$, то $f_{наиб} = f(2) = 4$, $f_{наим} = f(a) = a^2$. **283.** 10 ч, 40 ч. **284.** 20 %. **304.** 3 т. **323.** а) $y = x^2 + 3$; б) $y = -2x^2 - 1$. **324.** а) $y = 2x^2 - 6$; б) $y = 4 - x^2$. **325.** а) $y = (x - 2)^2$; б) $y = -3(x + 3)^2$. **326.** а) $y = \frac{1}{2}(x + 4)^2$; б) $y = -2(x - 1)^2$. **327.** а) $y = (x + 2)^2 - 4$; б) $y = -(x - 2)^2 + 5$; в) $y = \frac{1}{3}(x - 3)^2 + 1$. **328.** а) $y = (x - 4)^2 - 5$; б) $y = -2(x + 6)^2 + 7$.

331. Оба утверждения верны. **334.** 3) *Указание.* $y = \frac{-2x+2-2}{x-1} = -2 - \frac{2}{x-1}$.
338. $\frac{3}{4}$. **351.** -1; 1; 3. **352.** 4. **353.** 1) 2 корня; 2) 1 корень. **354.** 3 корня.
355. 1) $(-1; -1)$, $(9; 9)$; 2) $(2; 23)$, $(8; 17)$. **356.** $(3; 15)$, $(-1; 11)$. **362.** 1) -25; 2) -13; 3) -22. **363.** 1) 26; 2) 17; 3) -10. **364.** $p = 1$, $q = 4$. **365.** $a = -\frac{7}{6}$, $b = \frac{7}{6}$.
366. $a = 3$, $b = 5$. **369.** $b = -16$. **370.** $b = 18$. **371.** $a = 1$ или $a = 4$. **372.** $a \geq \frac{9}{2}$.
373. $a < -16$. **374.** $c = -8$. **375.** $c = 14$. **376.** а) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; б) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. **378.** $p = -4$, $q = 9$. **379.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 6$. **380.** а) -4; б) 4. **381.** -1. **382.** 1) 25. *Указание.* Пусть одно из чисел равно x, тогда другое число равно $10 - x$. Рассмотрите функцию $f(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$; 2) 50. **383.** 1600 м^2.
388. 1) $a > -4$; 2) $a = -4$; 3) $a < -4$. **390.** $a > \frac{13}{8}$. **391.** $a \geq -0{,}5$. **395.** 1) $8a\sqrt{a}$; 2) 56; 3) $6\sqrt{2} - 5$. **396.** 4 км/ч. **397.** 20 мин, 30 мин. **408.** 1) $(-2; 1)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$; 3) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-\infty; -21) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; 6) $\left[-\frac{13}{3}; 1\right]$.
409. 1) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-5; -3)$; 3) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty; -10) \cup (1; +\infty)$.
410. 1) При $-\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$; 2) при $x \leq -0{,}2$ или $x \geq 2{,}4$. **411.** 1) При $-\frac{5}{2} < x < \frac{9}{2}$; 2) при $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{10}{3}$. **412.** При $-5 < x < 4$. **413.** При $1 < x < 2{,}5$. **414.** 1) -5, -4, -3, -2, -1, 0; 2) -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3; 3) 0; 4) -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. **415.** 1) 11; 2) 4. **416.** 1) -6; 2) -2. **417.** 1) 1; 2) -3. **422.** 1) $-4 < a < 4$; 2) $-8 < a < 12$; 3) $\frac{3}{8} < a < \frac{3}{2}$. **423.** 1) $b < -\frac{1}{16}$ или $b > 1$; 2) $b < 4$ или $b > 10$. **424.** 1) $(0; 3]$; 2) $[-4; -0{,}5] \cup [6; +\infty)$; 3) $[-1; 0) \cup (6; 10]$; 4) $(-5; -3]$. **425.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 3\right)$; 2) $(-2; 0] \cup [5; 9)$. **426.** 1) -4, -3, -2, -1, 0, 1; 2) -3, -2, 1, 2. **427.** 1) $(6; +\infty)$; 2) $(-3; 5) \cup (5; 6)$; 3) $(-\infty; -9) \cup (-9; -2] \cup [7; 9) \cup (9; +\infty)$; 4) $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$.
428. 1) $[-2; 2)$; 2) $(-5; 6) \cup (6; 7)$. **429.** 1) $(-11; 11)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$.
430. 1) $(-\infty; -1] \cup [-0{,}4; 0{,}4] \cup [1; +\infty)$; 2) $[-2; 2]$. **431.** 1) $(-5; 0) \cup (0; 2)$; 2) $[0; 2]$; 3) $(-1; 2) \cup (2; 9)$; 4) $(-\infty; -5) \cup (-5; -3) \cup (5; +\infty)$; 5) $(-\infty; -8] \cup [1; 4) \cup (4; +\infty)$; 6) $[-11; -3) \cup (-3; 1]$. **432.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (3; +\infty)$; 2) $(4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (3; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 3]$. **433.** 1) $(-4; -3) \cup (5; +\infty)$;

2) $[-4; -3] \cup [5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4)$; 4) $(-\infty; -4] \cup \{-3; 5\}$. **434.** 1) $(3; 7)$; 2) $[3; 7] \cup \cup \{-2\}$; 3) $(-2; 3)$; 4) $[-2; 3] \cup \{7\}$. **435.** 1) При $a > 4$; 2) при $-1 \le a \le \frac{3}{5}$; 3) при $0 < a < \frac{1}{2}$; 4) при $a > \frac{5}{3}$. **436.** 1) При $a \ge 9$; 2) при $3 \le a \le 7$; 3) при $a \ge 1$. **437.** 1) Если $a < 1$, то $a < x < 1$ или $x > 4$; если $1 \le a \le 4$, то $x > 4$; если $a > 4$, то $x > a$; 2) если $a \le -\frac{1}{4}$, то решений нет; если $-\frac{1}{4} < a \le 1$, то $-\frac{1}{4} \le x < a$; если $a > 1$, то $-\frac{1}{4} \le x \le 1$. **438.** 1) Если $a \le -8$, то $-8 < x < 9$; если $-8 < a < 9$, то $a < x < 9$; если $a \ge 9$, то решений нет; 2) если $a < 1$, то $x < a$; если $1 \le a \le 8$, то $x < 1$; если $a > 8$, то $x < 1$ или $8 < x < a$. **441.** 3 дня. **442.** 40 л. **451.** 1) $(5; 8)$, $(-3; 0)$; 2) $(4; 1)$, $(1; 4)$; 3) $(-1; 1)$, $(-3; -1)$; 4) $(6; 1)$, $(-6; -2)$; 5) $(5; 3)$, $(-1{,}5; -10)$; 6) $(2; -2)$. **452.** 1) $(-4; -7)$, $(7; 4)$; 2) $(2; 4)$, $(-5; -3)$; 3) $(-1; 4)$, $(-0{,}5; 2{,}5)$; 4) $(4; 2)$, $(20; -14)$. **453.** 1) 2 решения; 2) 3 решения; 3) 1 решение; 4) 2 решения; 5) решений нет; 6) 3 решения. **454.** 1) 2 решения; 2) решений нет; 3) 2 решения; 4) 4 решения. **455.** 1) $(4; 3)$; 2) $(0; 0)$, $(-2{,}4; 4{,}8)$; 3) $(4; -3)$, $(17; 10)$; 4) $(9; -4)$, $(4; 1)$; 5) $(2; 2{,}5)$, $(-4{,}4; -2{,}3)$; 6) $(4; -1)$, $(0; 3)$. **456.** 1) $(6; 9)$, $(-9; -6)$; 2) $(1; 0)$, $(-0{,}5; 0{,}75)$; 3) $(2; 4)$, $(3; 3)$; 4) $(1; 1)$, $\left(\frac{17}{3}; \frac{38}{3}\right)$. **457.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, $(-2; -7)$; 2) $(2; 2)$, $(-1; -4)$; 3) $(1; 0)$, $(5; -4)$; 4) $(2; 3)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{43}{9}\right)$. **458.** $(-4; -1)$. **459.** 2) $(0{,}5; 5{,}5)$; 3) $(-4; 52)$, $(3; 3)$. **460.** 1) $(3; 4)$, $(4; 6)$; 2) $(-2; 1)$, $\left(-6; \frac{9}{5}\right)$. **461.** 1) $(2; 1)$, $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 2) $(1; 5)$, $\left(\frac{10}{3}; -2\right)$. **462.** 1) $(-5; 1)$, $(1; -5)$, $(4; 1)$, $(1; 4)$; 2) $(5; -2)$, $\left(\frac{6}{7}; \frac{15}{7}\right)$; 3) $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $\left(2\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$; 4) $(2; 3)$; 5) $(-3; 3)$, $(3; -3)$; 6) $(2; 1)$, $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$; 7) $(1; 0)$, $\left(-\frac{19}{21}; -\frac{8}{21}\right)$. **463.** 1) $(6; 3)$, $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) $(2; -1)$; 3) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; 4) $(9; 3)$, $(-9; -3)$; 5) $(-2; 1)$, $\left(\frac{29}{28}; -\frac{3}{14}\right)$; 6) $(-3; 4)$, $(-5; 2)$, $(1; -4)$, $(3; -2)$. **464.** 1) $(1; 0)$, $(0; 1)$; 2) $(3; -1)$, $(1; -3)$; 3) $(4; 3)$, $(-4; -3)$; 4) $(-3; 2)$, $(3; -2)$. **465.** 1) $(4; 2)$, $(-2; -4)$; 2) $(1; 3)$, $(-1; -3)$. **466.** 1) $(1; 2)$, $\left(7\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$; 2) $(-7; -5)$, $(4; 6)$; 3) $(-4; -3)$, $(-4; 2)$, $(3; -3)$, $(3; 2)$; 4) $(3; 1)$, $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **467.** 1) $(4; 1)$, $(1; 4)$; 2) $(1; -2)$, $\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$; 3) $(6; 5)$, $(-4; -5)$; 4) $(5; 4)$, $(-5; -4)$, $(5; -4)$, $(-5; 4)$. **468.** 1) $\left(7; \frac{1}{6}\right)$, $\left(1; \frac{7}{6}\right)$; 2) $(-2; 4)$, $(2; -4)$, $\left(\frac{94}{7}; -\frac{8}{7}\right)$,

$\left(-\frac{94}{7}; \frac{8}{7}\right)$; 3) (4; 3), (3; 4), (–4; –3), (–3; –4); 4) (1; –1), $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$, (–1; 1), $\left(\frac{1}{3}; -3\right)$. **469.** 1) (2; 1), (–5; –0,4); 2) (4; 0); 3) (1; 3), (3; 1), (–3; –1), (–1; –3); 4) (–2; 2), $\left(-10; \frac{2}{5}\right)$, (2; –2), $\left(10; -\frac{2}{5}\right)$. **470.** 1) $a = 3\sqrt{2}$ или $a = -3\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2}$; 3) $a < -3\sqrt{2}$ или $a > 3\sqrt{2}$. **471.** 1) $k = 2$ или $k = -2$; 2) $k < -2$ или $k > 2$; 3) $-2 < k < 2$. **472.** 1) Если $a > 0$, то 2 решения; если $a = 0$, то 1 решение; если $a < 0$, то решений нет; 2) если $-4 < a < 4$, то решений нет; если $a = -4$ или $a = 4$, то 2 решения; если $a < -4$ или $a > 4$, то 4 решения; 3) если $a > -\frac{1}{4}$, то 2 решения; если $a = -\frac{1}{4}$, то 1 решение; если $a < -\frac{1}{4}$, то решений нет; 4) если $a < -\frac{17}{4}$ или $a > 2$, то решений нет; если $a = -\frac{17}{4}$ или $-2 < a < 2$, то 2 решения; если $-\frac{17}{4} < a < -2$, то 4 решения; если $a = -2$, то 3 решения; если $a = 2$, то 1 решение. **473.** 1) Если $a < 1$, то решений нет; если $a = 1$, то 2 решения; если $a > 1$, то 4 решения; 2) если $a > 3\sqrt{2}$ или $a < -3$, то решений нет; если $a = 3\sqrt{2}$ или $-3 < a < 3$, то 2 решения; если $3 < a < 3\sqrt{2}$, то 4 решения; если $a = 3$, то 3 решения; если $a = -3$, то 1 решение; 3) если $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$, то решений нет; если $a = -2\sqrt{2}$ или $a = 2\sqrt{2}$, то 2 решения; если $a < -2\sqrt{2}$ или $a > 2\sqrt{2}$, то 4 решения. **475.** 5. **476.** $\left[0; \frac{6}{17}\right]$. **477.** 40. **480.** $7\frac{2}{17}$ динария, $9\frac{14}{17}$ динария. **481.** 72 км/ч, 10 км/ч. **483.** 12 км/ч, 18 км/ч. **484.** 8,4 г/см^3, 6,4 г/см^3. **485.** 18 км/ч. **486.** 27 км/ч, 3 км/ч. **487.** 80 км/ч, 60 км/ч. **488.** 80 км/ч, 60 км/ч, 120 км/ч, 80 км/ч. **489.** 60 км/ч. **490.** 60 км/ч, 30 км/ч. **491.** 2 км/ч. **492.** $\frac{5}{12}$ км/ч. **493.** 12 дней, 24 дня или 40 дней, 10 дней. **494.** 16 ч, 48 ч. **495.** 10 ч, 15 ч. **496.** 7 кг, 21 кг. **497.** 1,2 кг, 2,4 кг. **498.** 24 ч. **499.** 15 : 2. **500.** 24 км/ч, 16 км/ч. **501.** 50 км/ч, 40 км/ч. **502.** 2 км/ч, 12 км/ч. **503.** 12 ч, 9 ч. **504.** 10 ч 25 мин. **505.** 4 ч. **506.** 90 м^3, 60 м^3. **507.** 4 км/ч, 3 км/ч. **508.** 12 деталей. **509.** 5 деталей. **510.** 44 комплекта. **511.** 144 солдата. **512.** По 2 цеха каждого типа. **514.** 1) $(-\infty; -3,5)$; 2) $(-\infty; -6] \cup \left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **521.** На 12,5 %. **523.** 62 985,6 р. **524.** 20 736 единиц. **525.** 4000 р. **526.** 800 р. **527.** 5 %. **528.** На 15 %. **529.** 7,2 %. **530.** 20 %. **531.** 300 деревьев. **532.** 1100 м. **533.** 400 страниц.

534. 300 кг. **535.** 60 кг. **536.** 40 пистолей или 60 пистолей. **537.** 10 р. **538.** 150 %. **539.** 120 %. **540.** 200 г; 600 г. **541.** 12 кг; 6 кг. **542.** На 10 % в первый раз и на 20 % во второй. **543.** 20 %. **544.** 6 %. **545.** 10 %. **546.** 6 кг, 18 кг или 9 кг, 21 кг. **547.** 3 кг. **548.** 20 т или $2\frac{2}{3}$ т. **549.** 33 кг. *Указание*. Пусть получили x кг соляной кислоты. Тогда математической моделью задачи является уравнение $\frac{11}{x} - \frac{2}{x-9} = \frac{1}{4}$, корни которого – числа 33 и 12. Но корень 12 не удовлетворяет условию задачи, исходя из химических свойств соляной кислоты. **550.** 6 кг. **552.** При $c > 0{,}1$. **553.** 1) (3; 1), (1; 3); 2) (5; 2), (–2; –5). **572.** $b = -24$; $c = 38$. **573.** 9 дней. **576.** $4 \cdot 3$. **577.** $3 \cdot 6 \cdot 5$. **578.** 1) $3 \cdot 2$; 2) $5 \cdot 2$. **579.** Когда Антон взял яблоко. **580.** $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3$. **581.** $3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 5$. **582.** $5 \cdot 5$, $5 \cdot 4$. **583.** 1) 4!*; 2) 3!. **584.** 6^4. **585.** 5^3. **586.** $5 \cdot 6^3$. **587.** $4 \cdot 5^2$. **588.** $9 \cdot 10^6$. **589.** 20!. **590.** 2^4. **591.** 6^3. **592.** $6 \cdot 7 \cdot 4$. **593.** $6 \cdot 7 \cdot 3$. **594.** I способ. $4 \cdot 4!$; II способ. $5! - 4!$. **595.** $4! \cdot 2$. **596.** $9 \cdot 10^3 \cdot 2$. **597.** $9 \cdot 10^4 \cdot 4$. **598.** $64 \cdot 49$. **599.** $5^7 + 4 \cdot 5^6$. **600.** 2^{10}. **602.** 8 ч, 12 ч. **622.** $\left(-2; \frac{19}{4}\right)$; 2) $\left(-\infty; 5\frac{1}{4}\right]$. **624.** 10 при $a = 1$ и $b = 3$. **648.** 1) 3 шара; 2) 8 шаров. **649.** $\frac{2}{3}$. **650.** $\frac{2}{3}$. **651.** 8 карандашей. **652.** 19 карандашей. **654.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **655.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$. *Указание*. Бросить монету 3 раза – то же самое, что независимо друг от друга бросить 3 монеты. Если пронумеровать монеты, то имеем 8 равновозможных результатов, показанных на рисунке 113. **656.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$. *Указание*. Бросить кубик дважды – это то же самое, что независимо друг от друга бросить 2 кубика. Далее воспользуйтесь рисунком 90 к § 19. **657.** $\frac{2}{9}$. **658.** $\frac{5}{9}$. **659.** $\frac{4}{6^4}$. **660.** $\frac{6}{6^4}$. **661.** 2. **687.** $\frac{a}{a-1}$. **689.** 1) (12; 11), $\left(\frac{16}{3}; -\frac{7}{3}\right)$; 2) (4; 3), (–4; 3),

Рис. 113

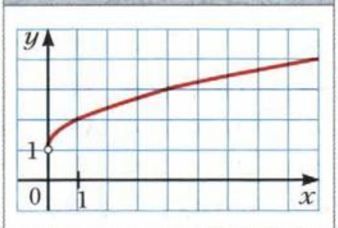
Первая монета	Вторая монета	Третья монета
Г	Г	Г
Г	Г	Ц
Г	Ц	Г
Г	Ц	Ц
Ц	Г	Г
Ц	Г	Ц
Ц	Ц	Г
Ц	Ц	Ц

* Напомним, что произведение n первых натуральных чисел обозначают так: $n!$ (читают: «n факториал»), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. По определению считают, что $1! = 1$.

(4; –3), (–4; –3). **702.** 8 членов. **703.** 13. **704.** 1, 2, 3, 4, 5. **705.** 8. **706.** 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$. **707.** 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
709. 2) [–6; 1). **711.** 32 детали. **725.** 1) Да, $n = 16$; 2) нет. **726.** 15. **729.** 23. **730.** –6. **732.** 18. **733.** 16. **734.** –0,6. **735.** –6; –4,5; –3; –1,5; 0; 1,5; 3. **736.** 2,2; 0,4; –1,4; –3,2. **737.** 1) $a_1 = 5$, $d = 2{,}5$; 2) $a_1 = -6$, $d = 4$ или $a_1 = 15$, $d = \frac{1}{2}$.
738. 1) $a_1 = -2$, $d = 3$; 2) $a_1 = 20$, $d = -8$ или $a_1 = 51{,}5$, $d = -11{,}5$. **739.** Если первый член прогрессии равен её разности или разность прогрессии равна нулю. **742.** 60. **743.** 1) Да, $a_1 = -3$, $d = -6$; 2) нет; 3) да, $a_1 = -2{,}8$, $d = -2{,}8$; 4) нет. **744.** 1) Да, $a_1 = 13$, $d = 7$; 2) да, $a_1 = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$; 3) нет. **750.** При $x = -1$ имеем: $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$; при $x = 8$ имеем: $a_1 = 60$, $a_2 = 43$, $a_3 = 26$. **751.** $y = 3$; $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$. **752.** $y = 1$; $a_1 = -1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 17$, $a_4 = 26$. **753.** $x = -1$; $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. **757.** 1) (7; –1), (11; –5); 2) (2; 2), (2; –2), (–2; 2), (–2; –2). **759.** –4. **760.** 1) $120\sqrt{2}$; 2) $150 - 30\sqrt{2}$. **762.** 24 детали. **771.** 1) 204; 2) 570. **772.** –310. **773.** 156 ударов. **774.** 1400. **775.** 710. **776.** 1188. **777.** 8, 14, 20. **778.** –17. **779.** $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. **780.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) n^2. **781.** $n(n+1)$.
782. 3. **783.** –67,2. **784.** 63. **785.** 5880. **786.** 2112. **787.** 1632. **788.** 61 376. **789.** 70 336. **790.** 0,3. **791.** 10. **792.** 20. **793.** 16. **794.** Да, 19, 23, 27, 31, 35. **795.** Нет. **796.** 10 с. **797.** 42 страницы. **798.** –1976. **799.** 348. **800.** $a_1 = 14$, $d = -3$. **801.** –10. **802.** 10. **803.** 690. **804.** 250. **805.** 1) 12; 2) 26. **806.** 1) 10; 2) 69. **807.** $a_1 = 1$, $d = 2$. **809.** $a_1 = -2$, $d = 2$. *Указание.* $a_n = S_n - S_{n-1}$.
810. 2610. **814.** 1) $\frac{a - \sqrt{bc}}{\sqrt{abc}}$; 2) $\frac{4\sqrt{d} - 28}{3\sqrt{d} + 18}$. **815.** 24 км/ч. **835.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ или $-\frac{3}{5}$. **836.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001. **837.** 6. **838.** 9. **839.** 30 и 150. **840.** 1; 2; 4; 8. **841.** Да, $b_1 = \frac{5}{4}$, $q = 4$. **842.** $x_1 = 49$, $q = 7$. **843.** 1) 15 или –15; 2) 6 или –6; 3) $2\sqrt{5}$ или $-2\sqrt{5}$. **844.** 2. **845.** $\sqrt{2}$ или $-\sqrt{2}$. **846.** 216. **847.** 243. **849.** $P_n = \frac{3a}{2^{n-1}}$. **851.** 3) Последовательность является геометрической прогрессией, если $q \neq -1$. **853.** 80, 40, 20, 10, 5 или 80, –40, 20, –10, 5. **854.** 6, 18, 54, 162, 486 или 6, –18, 54, –162, 486. **855.** 1) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$ или $b_1 = -2\sqrt{3}$, $q = -\sqrt{3}$; 2) $b_1 = 162$, $q = \frac{1}{3}$; 3) $b_1 = 7$, $q = -2$ или $b_1 = \frac{14}{9}$, $q = -3$. **856.** 1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$; 2) $b_1 = -1$, $q = 3$.
857. При $x = 1$ имеем 3, 6, 12; при $x = -14$ имеем –27, –9, –3. **858.** При $x = 2$

имеем 8, 4, 2; при $x = -7$ имеем -1, -5, -25. **860.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **861.** 3, 7, 11. **862.** 8, 10, 12 или 17, 10, 3. **863.** 5, 15, 45 или 45, 15, 5. **864.** 2, 6, 18 или 18, 6, 2. **869.** За 2 дня. **874.** 1) 1456; 2) $155(5 + \sqrt{5})$. **875.** 762. **876.** 1210. **877.** $-68{,}2$. **878.** 27. **879.** -7 или 6. **880.** 16 ран. **881.** 5. **882.** $(2^{72} - 1)$ бактерий. **883.** 72. **884.** $\frac{9}{8}$. **885.** 4368. **886.** $-12\,285$. **889.** 5. **890.** 1) $\left[-\frac{18}{7}; 13\right]$; 2) $[-1; 4)$. **893.** 50 деталей, 40 деталей. **894.** 1) $b - 5a$; 2) $x + 2y$. **902.** 1) $2(\sqrt{2} - 1)$; 2) $\frac{9(\sqrt{3}+1)}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$. **903.** 1) $\frac{3(\sqrt{6}+2)}{2}$; 2) $3\sqrt{2} + 4$. **904.** 35. **905.** $-\frac{1}{12}$. **906.** 1) $16 + 8\sqrt{2}$ или $16 - 8\sqrt{2}$; 2) 27. **907.** 1) 243; 2) 312,5. **909.** $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ или $b_1 = 3$, $q = -\frac{1}{2}$. **910.** $b_1 = 192$, $q = \frac{1}{4}$. **911.** $27 + 9\sqrt{3}$ или $27 - 9\sqrt{3}$. **912.** $\frac{25(5+\sqrt{5})}{2}$ или $\frac{25(\sqrt{5}-5)}{2}$. **913.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) -3. **914.** $-\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{4}$. **915.** $\frac{2}{5}$. **916.** $-\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{3}$. **917.** $2a^2$. **918.** 1) $6R\sqrt{3}$; 2) $R^2\sqrt{3}$; 3) $4\pi R$; 4) $\frac{4}{3}\pi R^2$. **919.** 1) $4a(2 + \sqrt{2})$; 2) $2a^2$; 3) $\pi a(2 + \sqrt{2})$; 4) $\frac{\pi a^2}{2}$. **921.** Рис. 114. **942.** 6. **945.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$; 3) $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$; 4) $\varnothing$; 5) R. **946.** 2. **947.** 0. **949.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[2; 3)$; 3) $[-2; 16]$; 4) $(-4; 7]$. **950.** 1) -9; 2) -2. **952.** 2. **954.** 1) $a < 4$; 2) $a < 2$; 3) $a \le -3$; 4) $a \ge 1$. **955.** 1) $a \ge 6$; 2) $a \ge 5$; 3) $a > -8$; 4) $a \le 0$. **957.** $a < -1{,}5$, $a \ne 2$. **958.** $a = 0$. **966.** 1) $b = 6$, $c = 9$; 2) $b = 0$, $c = 4$; 3) $b = -3$, $c = -10$. **969.** 3) $-2\sqrt{2}$ или $2\sqrt{2}$. **971.** $a = \frac{1}{3}$, $b = -4$, $c = 10$. **972.** $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$. **973.** 1) 1; 2) -8. **975.** 1. **981.** 1) $a \ne 4$; 2) $a < \frac{1}{2}$, или $\frac{1}{2} < a < 1$, или $a > 13$; 3) $a < -1$, или $-\frac{1}{5} < a < 0$, или $a > 0$. **982.** 1) $a > \frac{1}{20}$; 2) $a < -5$; 3) $a \le -1$; 4) $a > \frac{5}{3}$. **983.** 1) $(1; 4)$, $(-2; 7)$; 2) $(3; -4)$, $(4; -3)$; 3) $(4; 0)$, $(0; -4)$; 4) $(0; -5)$, $(3; 4)$, $(-3; 4)$. **984.** 1) $(-2; 1)$, $(-0{,}4; 1{,}4)$; 2) $(-2; 4)$, $\left(\frac{14}{9}; -\frac{20}{3}\right)$; 3) $(3; 5)$, $(10; 1{,}5)$; 4) $(4; -3)$, $(2; -6)$; 5) $(-5; 2)$; 6) $(3; 2)$, $(-2; -3)$; 7) $(3; -2)$, $(0; 1)$; 8) $(1; -2)$, $(3; 0)$; 9) $(8; 4)$, $(4; 8)$; 10) $(1; 5)$, $(-5; -1)$. **985.** 1) $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $(1; 2)$, $(-1; -2)$; 2) $(5; 1)$, $(1; 5)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$;

Рис. 114



3) (2; 1), (1; 2); 4) (6; 4), $\left(\frac{4}{5}; -\frac{6}{5}\right)$; 5) (4; 1), $\left(-\frac{1}{4}; 5\frac{1}{4}\right)$, (–4; –1), $\left(\frac{1}{4}; -5\frac{1}{4}\right)$; 6) (3; –2), (–3; 2); 7) (10; 5), (–5; –10); 8) (5; 3), (5; –3), (–5; 3), (–5; –3); 9) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3); 10) (1; 2), $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, (–1; –2), $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **986.** 1) (3; 4), (4,5; 8,5); 2) (3; 1), (–1,5; –2); 3) (3; 2), (2; 3), (–3; –2), (–2; –3). **987.** 1) $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 2\sqrt{3}$ или $a = -2\sqrt{3}$. **988.** 8 см, 15 см. **989.** 9 см, 40 см. **990.** 80 км/ч, 60 км/ч. **991.** 6 км/ч, 4 км/ч. **992.** 36 ч, 12 ч. **993.** 0,5 км/ч. **994.** 15 км/ч. **995.** 72 км/ч, 48 км/ч. **996.** 500 %. **997.** 220 %. **998.** 75 %. **999.** $33\frac{1}{3}$ %. **1000.** 50 %. **1001.** 31 492 р. 80 к. **1002.** 6000 р. **1003.** 20 %. **1004.** 80 %. **1005.** 10 %. **1006.** 1 : 3. **1007.** 20 кг. **1008.** 2 кг. **1019.** $\frac{11}{12}$. **1021.** С тридцать второго по шестьдесят четвёртый. **1024.** 2,4 см, 3,2 см. **1025.** 6) Да, $2d$; 7) да, $4d$. **1026.** 0, 4, 8. **1029.** 1) $\frac{n(a-n)}{a}$; 2) $\frac{n(na-b)}{a+b}$. **1030.** 11. **1031.** 1) $a_1 = -7$, $d = 3$; 2) $a_1 = 5$, $d = -2$ или $a_1 = 3$, $d = -2$; 3) $a_1 = d = 3$ или $a_1 = -33$, $d = 15$; 4) $a_1 = -0{,}7$, $d = 0{,}3$; 5) $a_1 = 0$, $d = 1{,}5$. **1032.** 10. **1033.** 255. **1034.** $\frac{2a^2}{3}$. **1035.** 1160. **1036.** 2610. *Указание.* Искомая сумма $S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4$, где S_1 — сумма всех двузначных чисел; S_2 — сумма двузначных чисел, кратных 3; S_3 — сумма двузначных чисел, кратных 5; S_4 — сумма двузначных чисел, кратных 15. **1038.** 2. **1039.** $2\frac{2}{3}$, 4, 6, 9. **1040.** 3) Да, q^2; 4) да, q; 5) нет; 6) да, $\frac{1}{q}$. **1041.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответы к заданиям в тестовой форме «Проверьте себя»

Задание № 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Г	Б	В	Б	А	В	В	В
10	11	12	13	14	15	16	17	18
А	Б	Г	Г	А	Г	В	Б	Б

Задание № 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Г	В	Б	В	А	Г	Г	В	В
10	11	12	13	14	15	16	17	18
В	В	Г	Б	Г	Б	В	В	А

Задание № 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
В	Б	А	В	Г	А	А	В	В
10	11	12	13	14	15	16	17	18
В	А	Г	Б	А	Г	В	Б	Б

Задание № 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Г	В	В	В	А	Б	А	А
10	11	12	13	14	15	16	17	18
А	Г	А	Б	В	Б	В	Б	Б

Задание № 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9
В	А	Г	Г	Б	В	В	А	Б
10	11	12	13	14	15	16	17	18
Г	Б	Г	Б	Б	А	Г	А	В

Задание № 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	В	Б	Г	Г	В	А	Б	Б
10	11	12	13	14	15	16	17	18
В	Б	А	Г	А	В	Б	А	В

Алфавитно-предметный указатель

Аргумент функции 55

Вероятность случайного события 160
Выборка 181
– репрезентативная 181

Генеральная совокупность 181
Гистограмма 183
Границы точного значения 19
Графический метод решения неравенств 113

Доказательство неравенств 7

Знаки неравенства 6
Знаменатель геометрической прогрессии 225
Значение функции 56

Классическое определение вероятности 171

Математическая модель 136
Математическое моделирование 136
Медиана выборки 188
Меры центральной тенденции 188
Метод замены переменных 124
– подстановки 122
– сложения 123
Множество решений неравенства 28
– – системы неравенств 40
Мода выборки 186

Неравенство линейное с одной переменной 33
– нестрогое 6
– строгое 6
Неравенства квадратные 113
– одинакового знака 17
– противоположных знаков 17
– равносильные 28
– с одной переменной 27
– числовые 5
Нуль функции 64

Область значений функции 56
– определения выражения 40
– – функции 55
Оценивание значения выражения 19

Парабола 72
Пересечение промежутков 42
Погрешность абсолютная 151
– относительная 152
Последовательность 204
– бесконечная 205
– конечная 205
– числовая 204
Правило произведения 156
– суммы 155
Прикладная задача 136
Прогрессия арифметическая 213
– геометрическая 225
Промежуток знакопостоянства функции 64

Размах 188
Разность арифметической прогрессии 213
Решение неравенства с одной переменной 27
– системы неравенств с одной переменной 40

Свойства функции 63
– числовых неравенств 11
Система неравенств 40
Событие достоверное 168
– невозможное 169
– случайное 160
Способ задания последовательности описательный 205
– – – рекуррентный 206
Сравнение чисел 5
Среднее геометрическое 7
Среднее значение выборки 185
Статистика 180
Статистическая оценка вероятности случайного события 162
Сумма бесконечной геометрической прогрессии 239

Теория вероятностей 173

Формула рекуррентная 206
– сложных процентов 147
– суммы бесконечной геометрической прогрессии 240
– – *n* первых членов арифметической прогрессии 220
– – – – – – геометрической прогрессии 235
– *n*-го члена арифметической прогрессии 214
– – – геометрической прогрессии 226
– – – последовательности 205
Функция 55
– возрастающая 65
– – на промежутке 65
– квадратичная 94
– убывающая 65
– – на промежутке 65

Частота 186
– относительная 186
– случайного события 160
Частотная таблица 186
Числовая прямая 33
Числовой промежуток 31
Член последовательности 204

Оглавление

От авторов ... 3

Глава 1. Неравенства ... 5
§ 1. Числовые неравенства ... 5
§ 2. Основные свойства числовых неравенств ... 11
§ 3. Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения ... 16
О некоторых способах доказательства неравенств ... 24
§ 4. Неравенства с одной переменной ... 27
§ 5. Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки ... 30
§ 6. Системы линейных неравенств с одной переменной ... 40
Задание № 1 «Проверьте себя» в тестовой форме ... 51
Итоги главы 1 ... 53

Глава 2. Квадратичная функция ... 55
§ 7. Повторение и расширение сведений о функции ... 55
Из истории развития понятия функции ... 61
§ 8. Свойства функции ... 63
§ 9. Построение графика функции $y = kf(x)$ ... 72
§ 10. Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$ ... 81
§ 11. Квадратичная функция, её график и свойства ... 94
О некоторых преобразованиях графиков функций ... 103
Задание № 2 «Проверьте себя» в тестовой форме ... 110
§ 12. Решение квадратных неравенств ... 113
§ 13. Системы уравнений с двумя переменными ... 122
Задание № 3 «Проверьте себя» в тестовой форме ... 132
Итоги главы 2 ... 134

Глава 3. Элементы прикладной математики ... 136
§ 14. Математическое моделирование ... 136
§ 15. Процентные расчёты ... 145
§ 16. Абсолютная и относительная погрешности ... 150
§ 17. Основные правила комбинаторики ... 154
§ 18. Частота и вероятность случайного события ... 159
§ 19. Классическое определение вероятности ... 168
Сначала была игра ... 178
§ 20. Начальные сведения о статистике ... 180

Задание № 4 «Проверьте себя» в тестовой форме 197
Задание № 5 «Проверьте себя» в тестовой форме 200
Итоги главы 3 202

Глава 4. Числовые последовательности 204
§ 21. Числовые последовательности 204
О кроликах, подсолнухах, сосновых шишках и «золотом сечении» 210
§ 22. Арифметическая прогрессия 212
§ 23. Сумма n первых членов арифметической прогрессии 219
§ 24. Геометрическая прогрессия 225
§ 25. Сумма n первых членов геометрической прогрессии 233
§ 26. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше 1 238
Задание № 6 «Проверьте себя» в тестовой форме 246
Итоги главы 4 248

Упражнения для повторения курса алгебры 9 класса 250
Сведения из курса алгебры 7–8 классов 264
Проектная работа 276
Дружим с компьютером 281
Ответы и указания 288
Ответы к заданиям в тестовой форме «Проверьте себя» 297
Алфавитно-предметный указатель 299

Учебное издание

Мерзляк Аркадий Григорьевич
Полонский Виталий Борисович
Якир Михаил Семёнович

Алгебра

9 класс

Учебник для учащихся
общеобразовательных организаций

Редактор *Н.В. Самсонова*
Художественный редактор *Е.В. Чайко*
Макет, внешнее оформление *Е.В. Чайко*
Компьютерная вёрстка *О.В. Поповой*
Технический редактор *Е.А. Урвачева*
Корректоры *Ю.С. Борисенко, О.Ч. Кохановская*

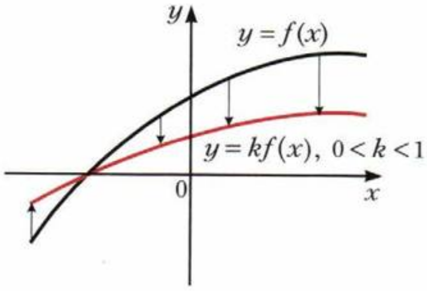
Подписано в печать 25.06.14. Формат 70×90/16
Гарнитура NewBaskervilleC. Печать офсетная
Бумага офсетная № 1. Печ. л. 19,0
Тираж 5000 экз. Заказ №10959

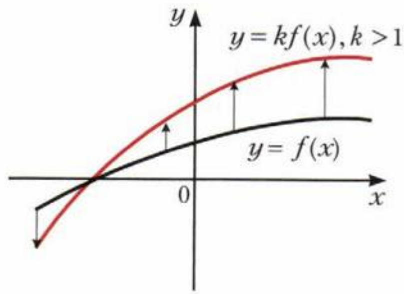
ООО Издательский центр «Вентана-Граф»
127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 1, стр. 3
Тел./факс: (495) 611-15-74, 611-21-56
E-mail: info@vgf.ru, http://www.vgf.ru

Отпечатано в типографии ООО «ЛД-ПРИНТ»
196644, г. Санкт-Петербург, Колпинский р-н, пос. Саперный,
территория предприятия «Балтика», д. б/н, лит. Ф.
Тел.: (812) 462-83-83; E-mail: office@ldprint.ru

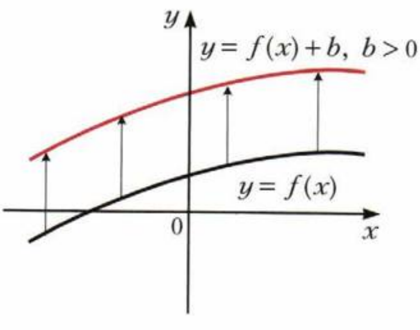
Преобразования графиков функций

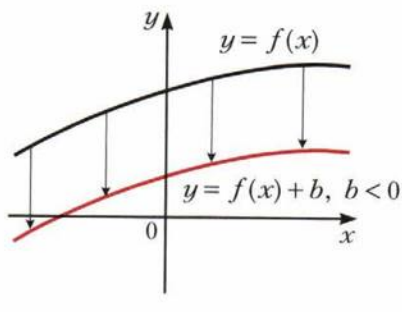
Растяжение от оси абсцисс и сжатие к оси абсцисс

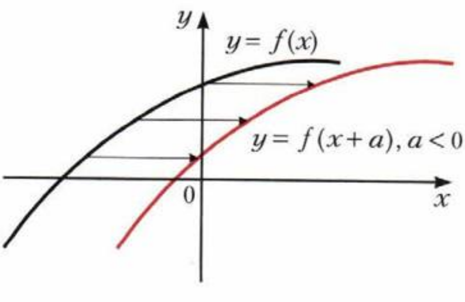


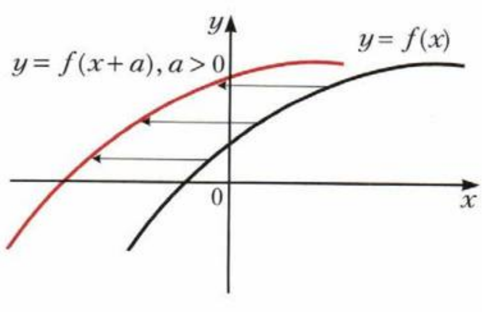


Параллельный перенос графика функции

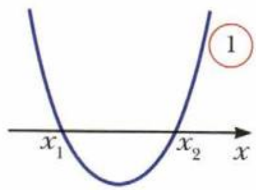
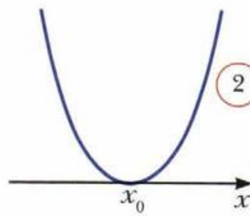
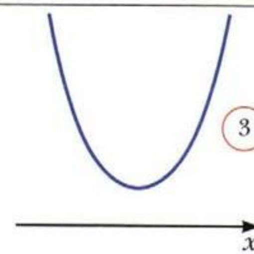
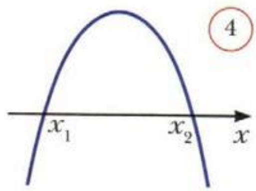
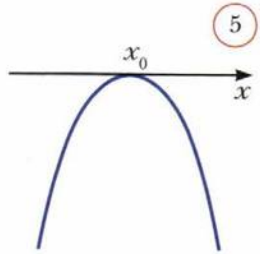
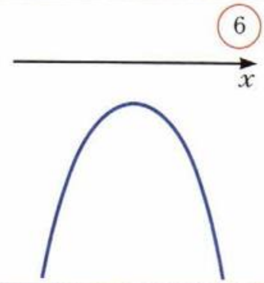








Расположение графика квадратичной функции относительно оси абсцисс

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Прогрессии

Арифметическая прогрессия — **Геометрическая прогрессия**

Формула n-го члена

$$a_n = a_1 + d(n-1) \qquad\qquad b_n = b_1 q^{n-1}$$

Формула суммы n первых членов прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n \qquad\qquad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},\ q \neq 1$$

Свойство членов прогрессии

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+2}}{2} \qquad\qquad b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше 1

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$